JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI e–ISSN: 2614–8811
Published by Departement of Mathematics, Hasanuddin University, Indonesia
https://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk/index
Vol. 21, No. 1, September 2024, pp. 78-87
DOI: 10.20956/j.v21i1.35615

On quinary semiring and properties of its special subsets

Semiring quiner dan sifat-sifat dari himpunan bagian khususnya

Tuhfatul Janan

Institut Ahmad Dahlan Probolinggo
***Email**: tuhfatuljanan4@gmail.com*

Abstract

In this research, we will discuss about quinary semiring and properties of its special subsets. This concept is a generalization of ternary semiring. If ternary semiring only involves 3 elements in multiplication operation, then in quinary semiring there are 5 elements involved. The method in this research is a literature study on articles in international journals. In this research, some definitions and properties of quinary semiring and some ideals are given, such as prime ideal, completely semiprime ideal, ideal which has insertion property, and prime radical. In addition, special subsets of quinary semiring are defined by $K(I), \overline{K(I)}, K_I$, and $\overline{K_I}$. Next, we give some properties of these special subsets.
Keywords: prime ideal, completely semiprime ideal, insertion property, quinary semiring

Abstrak

Pada penelitian ini, akan dibahas mengenai semiring quiner dan sifat-sifat dari himpunan bagian khususnya. Konsep ini merupakan perumuman dari semiring terner. Jika pada semiring terner hanya melibatkan 3 elemen pada operasi perkaliannya, maka pada semiring quiner terdapat 5 elemen yang terlibat. Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur pada artikel di jurnal internasional. Pada penelitian ini, diberikan beberapa definisi dan sifat dari semiring quiner dan beberapa idealnya, seperti ideal prima, ideal semiprima lengkap, ideal yang memiliki sifat insersi, dan radikal prima. Selain itu, didefinisikan beberapa himpunan bagian khusus dari semiring quiner yang dinotasikan sebagai $K(I), \overline{K(I)}, K_I$, dan $\overline{K_I}$. Selanjutnya, diberikan sifat-sifat dari himpunan bagian khusus tersebut.
Kata kunci: ideal prima, ideal semiprima lengkap, sifat insersi, semiring quiner

1. PENDAHULUAN

Pada tahun 1932, Lehmer [7] menemukan suatu konsep tentang sistem aljabar terner di mana operasi perkaliannya melibatkan tiga elemen. Konsep tersebut kemudian dikenal sebagai grup terner. Pada penelitian [14], Santiago memperkenalkan konsep tentang teori semigrup terner, suatu perumuman dari grup terner. Dia mengembangkan perluasan dari semigrup terner dan menunjukkan beberapa aplikasinya pada bidang lain. Selanjutnya, Lister dalam penelitian [8] mengenalkan struktur aljabar lain yang disebut sebagai ring terner. Dia mempelajari tentang penggabungan ring terner dan karakteristik ring terner semisederhana.

Pada penelitian [4], Dutta dan Kar menyajikan konsep tentang semiring terner, bersama dengan semiring terner reguler dan semiring terner k-reguler, menyelidiki berbagai sifat yang terkait dengannya. Semiring terner merupakan suatu perumuman dari ring terner yang ditemukan oleh Lister. Pada penelitian terpisah yang didokumentasikan dalam [5] dan [1], diperkenalkan konsep tentang semiring terner penjumlahan k-reguler dan semiring terner reguler dan intra reguler dalam bentuk ideal fuzzy m-polar. Selain itu, rangkaian penelitian pada [10], [11], [12], [15], dan [9] secara berturut-turut mengidentifikasi beberapa ideal khusus dari semiring terner, seperti ideal k-hibrida, a-ideal, tri-ideal, k-ideal penuh, dan bi-ideal p-prima.

Konsep tentang ring 2-primal diperkenalkan oleh Birkenmeier, Heatherly, dan Lee pada [2] melalui ring near kiri. Mereka mendefinisikan suatu ring disebut 2-primal jika himpunan radikalnya sama dengan himpunan nilpotennya. Paykan dan Moussavi mengembangkan penelitian tersebut pada [13] tentang karakteristik deret diperumum miring dari ring 2-primal. Pada tahun 2015, Dutta dan Mandal [3] menemukan konsep tentang semiring terner 2-primal, suatu perumuman dari ring terner 2-primal. Janan dan Irawati [6] melanjutkan penelitian pada [3] dengan mendefinisikan beberapa himpunan bagian khusus lain yang bertujuan untuk menemukan sifat dan karakteristik lain dari semiring terner 2-primal.

Pada penelitian ini, akan dibahas mengenai perumuman dari semiring terner, yaitu semiring quiner dan sifat-sifat dari himpunan bagian khususnya. Jika pada semiring terner hanya melibatkan 3 elemen pada operasi perkaliannya, maka pada semiring quiner terdapat 5 elemen yang terlibat. Konsep ini merupakan kajian baru dalam bidang struktur aljabar. Mula-mula, akan diberikan beberapa definisi dan sifat dari semiring quiner dan beberapa idealnya, seperti ideal prima, ideal semiprima lengkap, ideal yang memiliki sifat insersi, dan radikal prima. Selanjutnya, didefinisikan perumuman dari beberapa himpunan bagian khusus dari semiring quiner pada [3] yang dinotasikan sebagai $K(I), \overline{K(I)}, K_I$, dan $\overline{K_I}$. Terakhir, diberikan sifat-sifat dari beberapa himpunan bagian khusus tersebut.

2. METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini, digunakan metode studi literatur pada artikel-artikel yang terbit di jurnal internasional. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan definisi dari semiring quiner dan beberapa idealnya, seperti ideal prima, ideal semiprima lengkap, dan ideal yang memiliki sifat insersi.
2. Menentukan sifat-sifat dari ideal prima dan radikal prima dari semiring quiner.
3. Menentukan definisi dari himpunan bagian khusus dari semiring quiner.
4. Menentukan sifat-sifat dari himpunan bagian khusus dari semiring quiner.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Semiring Quiner dan Beberapa Idealnya

Pada bagian ini, diberikan beberapa definisi dan sifat dari semiring quiner dan beberapa idealnya, seperti ideal prima, ideal semiprima lengkap, ideal yang memiliki sifat insersi, dan radikal prima.

Definisi 3.1.1 *Semiring quiner didefinisikan sebagai himpunan tidak kosong S, bersama dengan operasi penjumlahan biner dan perkalian quiner, membentuk semigrup komutatif penjumlahan dan memenuhi sifat-sifat berikut:*

(1) $(s_1s_2s_3s_4s_5)s_6s_7s_8s_9 = s_1(s_2s_3s_4s_5s_6)s_7s_8s_9 = s_1s_2(s_3s_4s_5s_6s_7)s_8s_9 = s_1s_2s_3(s_4s_5s_6s_7s_8)s_9 = s_1s_2s_3s_4(s_5s_6s_7s_8s_9)$,
(2) $(s_1 + s_2)s_3s_4s_5s_6 = s_1s_3s_4s_5s_6 + s_2s_3s_4s_5s_6$,
(3) $s_1(s_2 + s_3)s_4s_5s_6 = s_1s_2s_4s_5s_6 + s_1s_3s_4s_5s_6$,
(4) $s_1s_2(s_3 + s_4)s_5s_6 = s_1s_2s_3s_5s_6 + s_1s_2s_4s_5s_6$,
(5) $s_1s_2s_3(s_4 + s_5)s_6 = s_1s_2s_3s_4s_6 + s_1s_2s_3s_5s_6$,
(6) $s_1s_2s_3s_4(s_5 + s_6) = s_1s_2s_3s_4s_5 + s_1s_2s_3s_4s_6$

untuk setiap $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9 \in S$.

Definisi 3.1.2 *Misalkan S adalah semiring quiner. Maka elemen $e \in S$ disebut elemen identitas jika $xeeee = exeee = eexee = eeexe = eeeex = x$ untuk setiap $x \in S$. Jika S memiliki elemen identitas maka S disebut semiring quiner dengan elemen identitas. Pada penelitian ini, semiring quiner S menunjukkan semiring quiner S dengan elemen identitas.*

Definisi 3.1.3 *Misalkan V, W, X, Y, Z adalah himpunan bagian dari semiring quiner S. Maka didefinisikan $VWXYZ = \{\sum_{i=1}^{n} v_iw_ix_iy_iz_i \mid v_i \in V, w_i \in W, x_i \in X, y_i \in Y, z_i \in Z\}$.*

Berdasarkan Definisi 3.1.3, diperoleh $0VWXY = \{\sum_{i=1}^{n} 0v_iw_ix_iy_i \mid v_i \in V, w_i \in W, x_i \in X, y_i \in Y\} = \{\sum_{i=1}^{n} 0\} = \{0\} = V0WXY = VW0XY = VWX0Y = VWXY0$.

Definisi 3.1.4 *Semigrup penjumlahan I dari semiring quiner S disebut ideal dari S jika $xs_1s_2s_3s_4, s_1xs_2s_3s_4, s_1s_2xs_3s_4, s_1s_2s_3xs_4, s_1s_2s_3s_4x \in I$ untuk setiap $x \in I$ dan $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$.*

Definisi 3.1.5 *Ideal dari semiring quiner S yang dibangun oleh $v \in S$ didefinisikan $\langle v \rangle = SSSSvSSSS$.*

Definisi 3.1.6 *Ideal I dari semiring quiner S disebut ideal prima dari S jika $VWXYZ \subseteq I$ mengakibatkan $V \subseteq I$ atau $W \subseteq I$ atau $X \subseteq I$ atau $Y \subseteq I$ atau $Z \subseteq I$ untuk setiap ideal V, W, X, Y, Z dari S. Selanjutnya, I disebut ideal semiprima lengkap dari S jika $x^5 \in I$ mengakibatkan $x \in I$ untuk setiap $x \in S$.*

Teorema 3.1.7 *Misalkan S adalah semiring quiner dan I adalah ideal dari S. Maka I adalah ideal prima dari S jika dan hanya jika $vSSSSwSSSSxSSSSySSSSz \subseteq I$ mengakibatkan $v \in I$ atau $w \in I$ atau $x \in I$ atau $y \in I$ atau $z \in I$ untuk setiap $v, w, x, y, z \in S$.*

Bukti. $(\Rightarrow)$. Ambil sebarang $v, w, x, y, z \in S$ yang memenuhi $vSSSSwSSSSxSSSSySSSSz \subseteq I$. Karena $\langle v \rangle = SSSSvSSSS$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\langle v\rangle\langle w\rangle\langle x\rangle\langle y\rangle\langle z\rangle &= SSSSv(SSSSS)SSSw(SSSSS)SSSx(SSSSS)SSSy(SSSSS)SSSzSSSS \\ &\subseteq SSSS(vSSSSwSSSSxSSSSySSSSz)SSSS \\ &\subseteq (SSSSI)SSSS \subseteq ISSSS \subseteq I.\end{aligned}$$

Karena I adalah ideal prima dari S, maka $\langle v \rangle \subseteq I$ or $\langle w \rangle \subseteq I$ or $\langle x \rangle \subseteq I$ or $\langle y \rangle \subseteq I$ or $\langle z \rangle \subseteq I$. Jadi, diperoleh $v \in I$ or $w \in I$ or $x \in I$ or $y \in I$ or $z \in I$.

$(\Leftarrow)$. Ambil sebarang ideal V, W, X, Y, Z dari S yang memenuhi $VWXYZ \subseteq I$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $W, X, Y, Z \nsubseteq I$. Maka terdapat $w \in W, x \in X, y \in Y$, dan $z \in$

Z sedemikian sehingga $w, x, y, z \notin I$. Oleh karena itu, untuk setiap $v \in V$ diperoleh $vSSSSwSSSSxSSSSySSSSz \subseteq (VSSSS)(WSSSS)(XSSSS)(YSSSS)(ZSSSS) \subseteq VWXYZ \subseteq I$. Dengan demikian, diperoleh $v \in I$ yang mengakibatkan $V \subseteq I$. Jadi, I adalah ideal prima dari S.

Definisi 3.1.8 *Himpunan bagian tidak kosong M dari semiring quiner S disebut m-sistem jika untuk setiap $v, w, x, y, z \in M$ terdapat $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{16} \in S$ sedemikian sehingga $vs_1s_2s_3s_4ws_5s_6s_7s_8xs_9s_{10}s_{11}s_{12}ys_{13}s_{14}s_{15}s_{16}z \in M$.*

Teorema 3.1.9 *Misalkan S adalah semiring quiner dan I adalah ideal dari S. Maka I adalah ideal prima dari S jika dan hanya jika komplemen dari I yang dinotasikan sebagai I^C adalah m-sistem.*

Bukti. ($\Rightarrow$). Andaikan bahwa I^C bukan m-sistem. Maka terdapat $v, w, x, y, z \in I^C$ sedemikian sehingga untuk setiap $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{16} \in S$ mengakibatkan $vs_1s_2s_3s_4ws_5s_6s_7s_8xs_9s_{10}s_{11}s_{12}y$ $s_{13}s_{14}s_{15}s_{16}z \in I$. Oleh karena itu, diperoleh $vSSSSwSSSSxSSSSySSSSz \subseteq I$. Karena I adalah ideal prima dari S, maka berdasarkan Teorema 3.1.7, diperoleh $v \in I$ atau $w \in I$ atau $x \in I$ atau $y \in I$ atau $z \in I$. Hal ini menimbulkan suatu kontradiksi. Jadi, I^C adalah m-sistem.

($\Leftarrow$). Misalkan I^C adalah m-sistem. Maka untuk setiap $v, w, x, y, z \in I^C$ terdapat $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{16} \in S$ yang memenuhi $vs_1s_2s_3s_4ws_5s_6s_7s_8xs_9s_{10}s_{11}s_{12}ys_{13}s_{14}s_{15}s_{16}z \notin I$. Oleh karena itu, diperoleh $vSSSSwSSSSxSSSSySSSSz \nsubseteq I$. Jadi, berdasarkan Teorema 3.1.7, I adalah ideal prima dari S.

Definisi 3.1.10 *Ideal I dari semiring quiner S memiliki sifat insersi jika $vwxyz \in I$ mengakibatkan $vSSSSwSSSSxSSSSySSSSz \subseteq I$ untuk setiap $v, w, x, y, z \in S$.*

Teorema 3.1.11 Misalkan *S adalah semiring quiner dan $\mathcal{P}(S)$ adalah radikal prima dari S, yaitu irisan dari semua ideal prima dari S. Maka $\mathcal{P}(S)$ adalah ideal dari S.*

Bukti. Berdasarkan definisi dari $\mathcal{P}(S)$, diperoleh $\mathcal{P}(S) \subseteq S$. Karena $0 \in I$ untuk setiap ideal prima I dari S, maka $0 \in \mathcal{P}(S)$ yang mengakibatkan $\mathcal{P}(S) \neq \emptyset$. Selanjutnya, ambil sebarang $x_1, x_2 \in \mathcal{P}(S)$. Maka $x_1, x_2 \in I$ untuk setiap ideal prima I dari S. Oleh karena itu, $x_1 + x_2 \in I$ untuk setiap ideal prima I dari S. Dengan demikian, diperoleh $x_1 + x_2 \in \mathcal{P}(S)$. Selanjutnya, ambil sebarang $x \in \mathcal{P}(S)$ dan $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$. Akibatnya, $x \in I$ untuk setiap ideal prima I dari S. Oleh karena itu, $s_1s_2s_3s_4x, s_1s_2s_3xs_4, s_1s_2xs_3s_4, s_1xs_2s_3s_4, xs_1s_2s_3s_4 \in I$ untuk setiap ideal prima I dari S. Dengan demikian, $s_1s_2s_3s_4x, s_1s_2s_3xs_4, s_1s_2xs_3s_4, s_1xs_2s_3s_4, xs_1s_2s_3s_4 \in \mathcal{P}(S)$. Jadi, $\mathcal{P}(S)$ adalah ideal dari S.

Definisi dari semiring quiner merupakan perumuman dan adaptasi dari definisi semiring terner yang telah diteliti oleh Dutta dan Kar pada [4]. Jika pada semiring terner hanya melibatkan 3 elemen pada operasi perkaliannya, maka pada semiring quiner terdapat 5 elemen yang terlibat. Pada semiring terner hanya terdapat 3 sifat distributif yaitu distributif kiri, tengah, dan kanan, sedangkan pada semiring quiner terdapat 5 sifat distributif. Hal ini berakibat pada definisi dari elemen identitas, ideal, ideal prima, ideal semiprima lengkap, himpunan m-sistem, dan ideal yang memiliki sifat insersi. Definisi-definisi tersebut merupakan perumuman dan adaptasi dari definisi yang telah diteliti oleh Dutta dan Kar pada [4] dan Dutta dan Mandal pada [3]. Sifat-sifat yang diperoleh pada bagian ini juga merupakan perumuman dan adaptasi dari penelitian [3] dan [4]. Sebagai contoh pada penelitian [4] disebutkan bahwa suatu ideal I dari semiring terner S disebut prima jika dan hanya jika $vSSwSSx \subseteq I$ mengakibatkan $v \in I$ atau $w \in I$ atau $x \in I$ untuk setiap $v, w, x \in S$.

Maka pada penelitian dilakukan perumuman dan adaptasi dari sifat tersebut, yaitu ideal I dari semiring quiner S disebut prima jika dan hanya jika $vSSSSwSSSSxSSSSySSSSz \subseteq I$ mengakibatkan $v \in I$ atau $w \in I$ atau $x \in I$ atau $y \in I$ atau $z \in I$ untuk setiap $v, w, x, y, z \in S$.

3.2 Himpunan Bagian Khusus dari Semiring Quiner

Pada bagian ini, diberikan definisi dari himpunan bagian khusus dari semiring quiner yang merupakan perumuman dari himpunan bagian khusus pada [3]. Selanjutnya, diberikan beberapa sifat dari himpunan bagian khusus tersebut.

Dapat diperhatikan bahwa $(xSSS)^1x = xSSSx \subseteq S$, $(xSSS)^2x = (xSSSx)SSSx \subseteq SSSSx \subseteq S$, $(xSSS)^3x = (xSSSx)SSS(xSSSx) \subseteq SSSSS \subseteq S$. Hal ini mengakibatkan $(xSSS)^n x \subseteq S$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$.

Definisi 3.2.1 *Misalkan S adalah semiring quiner dan I adalah ideal prima dari S. Maka didefinisikan*

$$K(I) = \{x \in S \mid xSSSSySSS \subseteq \mathcal{P}(S) \text{ untuk suatu } y \in I^C\},$$
$$\overline{K(I)} = \{x \in S \mid (xSSS)^n x \subseteq K(I) \text{ untuk suatu } n \in \mathbb{Z}^+\},$$
$$K_I = \{x \in S \mid xySSS \subseteq \mathcal{P}(S) \text{ untuk suatu } y \in I^C\},$$
$$\overline{K_I} = \{x \in S \mid (xSSS)^n x \subseteq K_I \text{ untuk suatu } n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Proposisi 3.2.2 *Misalkan S adalah semiring quiner dan I adalah ideal prima dari S. Maka*

(1) $K(I) \subseteq I$,
(2) $K(I) \subseteq \overline{K(I)} \subseteq \overline{K_I}$,
(3) $K(I) \subseteq K_I \subseteq \overline{K_I}$.

Bukti. (1). Ambil sebarang $x \in K(I)$. Maka terdapat $y \in I^C$ sedemikian sehingga $xSSSSySSS \subseteq \mathcal{P}(S)$. Akibatnya, $xSSSSySSS \subseteq I$ untuk setiap ideal prima I dari S. Oleh karena itu, $(xSSSSySSS)SxSSSSxSSSSx \subseteq I(SSSSS)(SSSSS)SS \subseteq ISSSS \subseteq I$. Berdasarkan Teorema 3.1.7, diperoleh $x \in I$. Jadi, $K(I) \subseteq I$.

(2). Ambil sebarang $x \in K(I)$. Maka terdapat $y \in I^C$ sedemikian sehingga $xSSSSySSS \subseteq \mathcal{P}(S)$. Berdasarkan Teorema 3.1.11, diperoleh $(xSSS)^n(xSSSSySSS) \subseteq (SSSS)^n(\mathcal{P}(S)) \subseteq \mathcal{P}(S)$. Oleh karena itu, diperoleh $(xSSS)^n x \subseteq K(I)$ yang mengakibatkan $x \in \overline{K(I)}$. Dengan demikian, diperoleh $K(I) \subseteq \overline{K(I)}$. Selanjutnya, ambil sebarang $x \in \overline{K(I)}$. Maka terdapat $n \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $(xSSS)^n x \subseteq K(I)$. Akibatnya, terdapat $y \in I^C$ sedemikian sehingga $(xSSS)^n xSSSSySSS \subseteq \mathcal{P}(S)$. Karena S memiliki elemen identitas e, maka $(xSSS)^n xySSS = (xSSS)^n(xeeee)ySSS \subseteq (xSSS)^n xSSSSySSS \subseteq \mathcal{P}(S)$. Oleh karena itu, $(xSSS)^n x \subseteq K_I$ yang mengakibatkan $x \in \overline{K_I}$. Dengan demikian, diperoleh $\overline{K(I)} \subseteq \overline{K_I}$. Jadi, $K(I) \subseteq \overline{K(I)} \subseteq \overline{K_I}$.

(3). Ambil sebarang $x \in K(I)$. Maka terdapat $y \in I^C$ sedemikian sehingga $xSSSSySSS \subseteq \mathcal{P}(S)$. Karena S memiliki elemen identitas e, maka $xySSS = (xeeee)ySSS \subseteq xSSSSySSS \subseteq \mathcal{P}(S)$. Oleh karena itu, diperoleh $x \in K_I$. Dengan demikian, diperoleh $K(I) \subseteq K_I$. Selanjutnya, ambil sebarang $x \in K_I$. Maka terdapat $y \in I^C$ sedemikian sehingga $xySSS \subseteq \mathcal{P}(S)$. Berdasarkan Teorema 3.1.11, diperoleh $(xSSS)^n(xySSS) \subseteq (SSSS)^n(\mathcal{P}(S)) \subseteq \mathcal{P}(S)$. Oleh karena itu, diperoleh $(xSSS)^n x \subseteq K_I$ yang mengakibatkan $x \in \overline{K_I}$. Dengan demikian, diperoleh $K_I \subseteq \overline{K_I}$. Jadi, $K(I) \subseteq K_I \subseteq \overline{K_I}$.

Proposisi 3.2.3 *Misalkan S adalah semiring quiner dan I_1, I_2 adalah ideal prima dari S dengan $I_1 \subseteq I_2$. Maka $K(I_2) \subseteq K(I_1)$, $\overline{K(I_2)} \subseteq \overline{K(I_1)}$, $K_{I_2} \subseteq K_{I_1}$, dan $\overline{K_{I_2}} \subseteq \overline{K_{I_1}}$.*

Bukti. Ambil sebarang $x \in K(I_2)$. Maka terdapat $y \in (I_2)^C$ sedemikian sehingga $xSSSSySSS \subseteq \mathcal{P}(S)$. Karena $I_1 \subseteq I_2$, maka diperoleh $(I_2)^C \subseteq (I_1)^C$ yang mengakibatkan $y \in (I_1)^C$. Dengan demikian, diperoleh $x \in K(I_1)$. Jadi, $K(I_2) \subseteq K(I_1)$. Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan juga bahwa $\overline{K(I_2)} \subseteq \overline{K(I_1)}$, $K_{I_2} \subseteq K_{I_1}$, dan $\overline{K_{I_2}} \subseteq \overline{K_{I_1}}$.

Lema 3.2.4 *Misalkan S adalah semiring quiner dan I adalah ideal prima dari S. Maka $K(I) = \{x \in S \mid xSSSS\langle y\rangle SSS \subseteq \mathcal{P}(S)$ untuk suatu $y \in I^C\}$.*

Bukti. Didefinisikan $K'(I) = \{x \in S \mid xSSSS\langle y\rangle SSS \subseteq \mathcal{P}(S)$ untuk suatu $y \in I^C\}$. Ambil sebarang $x \in K'(I)$. Maka terdapat $y \in I^C$ sedemikian sehingga $xSSSS\langle y\rangle SSS \subseteq \mathcal{P}(S)$. Karena S adalah semiring quiner dengan elemen identitas, maka $\langle y\rangle = SSSSySSSS$. Oleh karena itu, $xSSSSySSS \subseteq xSSSS\langle y\rangle SSS \subseteq \mathcal{P}(S)$ yang mengakibatkan $x \in K(I)$. Dengan demikian, diperoleh $K'(I) \subseteq K(I)$. Selanjutnya, ambil sebarang $x \in K(I)$. Maka terdapat $y \in I^C$ sedemikian sehingga $xSSSSySSS \subseteq \mathcal{P}(S)$. Oleh karena itu, diperoleh $xSSSS\langle y\rangle SSS = xSSSS(SSSSySSSS)SSS = xSSS(SSSSS)y(SSSSS)SS \subseteq xSSSSySSS \subseteq \mathcal{P}(S)$ yang mengakibatkan $x \in K'(I)$. Dengan demikian, diperoleh $K(I) \subseteq K'(I)$. Jadi, $K(I) = K'(I)$.

Teorema 3.2.5 *Misalkan S adalah semiring quiner dan I adalah ideal prima dari S. Maka $K(I)$ adalah ideal dari S.*

Bukti. Berdasarkan Definisi 3.2.1, diperoleh $K(I) \subseteq S$. Karena terdapat $y \in I^C$ sedemikian sehingga $0SSSSySSS = \{0\} \subseteq \mathcal{P}(S)$, maka $0 \in K(I)$ yang mengakibatkan $K(I) \neq \emptyset$. Selanjutnya, ambil sebarang $x_1, x_2 \in K(I)$. Berdasarkan Lema 3.2.4, terdapat $y_1, y_2 \in I^C$ sedemikian sehingga $x_1SSSS\langle y_1\rangle SSS \subseteq \mathcal{P}(S)$ dan $x_2SSSS\langle y_2\rangle SSS \subseteq \mathcal{P}(S)$. Berdasarkan Teorema 3.1.9, diperoleh I^C adalah m-sistem. Akibatnya, terdapat $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{16} \in S$ sedemikian sehingga $y_1s_1s_2s_3s_4y_1s_5s_6s_7s_8y_2s_9s_{10}s_{11}s_{12}y_2s_{13}s_{14}s_{15}s_{16}y_2 \in I^C$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
&x_1SSSS\langle y_1s_1s_2s_3s_4y_1s_5s_6s_7s_8y_2s_9s_{10}s_{11}s_{12}y_2s_{13}s_{14}s_{15}s_{16}y_2\rangle SSS\\
&\quad = x_1SSSSSSSSy_1(s_1s_2s_3s_4y_1)(s_5s_6s_7s_8y_2)(s_9s_{10}s_{11}s_{12}y_2)(s_{13}s_{14}s_{15}s_{16}y_2)SSSSSSS\\
&\quad \subseteq x_1SSSSSSSSy_1(SSSS)SSSSSSS\\
&\quad \subseteq x_1SSSS(SSSSy_1SSSS)SSS\\
&\quad = x_1SSSS\langle y_1\rangle SSS \subseteq \mathcal{P}(S) \text{ dan}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_2SSSS\langle y_1s_1s_2s_3s_4y_1s_5s_6s_7s_8y_2s_9s_{10}s_{11}s_{12}y_2s_{13}s_{14}s_{15}s_{16}y_2\rangle SSS\\
&\quad = x_1SSSSSSSS(y_1s_1s_2s_3s_4)(y_1s_5s_6s_7s_8)(y_2s_9s_{10}s_{11}s_{12})(y_2s_{13}s_{14}s_{15}s_{16})y_2SSSSSSS\\
&\quad \subseteq x_1SSSSSSSS(SSSS)y_2SSSSSSS\\
&\quad \subseteq x_1SSSS(SSSSy_2SSSS)SSS\\
&\quad = x_1SSSS\langle y_2\rangle SSS \subseteq \mathcal{P}(S).
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 3.1.11 diperoleh

$$\begin{aligned}
&(x_1 + x_2)SSSS\langle y_1s_1s_2s_3s_4y_1s_5s_6s_7s_8y_2s_9s_{10}s_{11}s_{12}y_2s_{13}s_{14}s_{15}s_{16}y_2\rangle SSS\\
&\qquad = x_1SSSS\langle y_1s_1s_2s_3s_4y_1s_5s_6s_7s_8y_2s_9s_{10}s_{11}s_{12}y_2s_{13}s_{14}s_{15}s_{16}y_2\rangle SSS +\\
&\qquad\quad x_2SSSS\langle y_1s_1s_2s_3s_4y_1s_5s_6s_7s_8y_2s_9s_{10}s_{11}s_{12}y_2s_{13}s_{14}s_{15}s_{16}y_2\rangle SSS\\
&\quad \subseteq \mathcal{P}(S) + \mathcal{P}(S) \subseteq \mathcal{P}(S).
\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh $x_1 + x_2 \in K(I)$.

Selanjutnya, ambil sebarang $x \in K(I)$ dan $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$. Berdasarkan Lema 3.2.4, terdapat $y \in I^C$ sedemikian sehingga $xSSSS\langle y\rangle SSS \subseteq \mathcal{P}(S)$. Berdasarkan Teorema 3.1.11, diperoleh

$(s_1s_2s_3s_4x)SSSS\langle y\rangle SSS \subseteq SSSS(xSSSS\langle y\rangle SSS)$

$$\begin{aligned}&\subseteq SSSS(\mathcal{P}(S)) \subseteq \mathcal{P}(S) \text{ dan}\\ (xs_1s_2s_3s_4)SSSS\langle y\rangle SSS &\subseteq x(SSSSS)SSS\langle y\rangle SSS\\ &\subseteq xSSSS\langle y\rangle SSS \subseteq \mathcal{P}(S).\end{aligned}$$

Oleh karena itu, diperoleh $s_1s_2s_3s_4x, xs_1s_2s_3s_4 \in K(I)$. Selanjutnya, karena S memiliki elemen identitas e, maka

$s_1s_2s_3xs_4 \in SSSxS = SSS(exeee)S \subseteq SSSSxSSSS = \langle x\rangle \subseteq K(I)$,
$s_1s_2xs_3s_4 \in SSxSS = SS(eexee)SS \subseteq SSSSxSSSS = \langle x\rangle \subseteq K(I)$, dan
$s_1xs_2s_3s_4 \in SxSSS = S(eeexe)SSS \subseteq SSSSxSSSS = \langle x\rangle \subseteq K(I)$.

Dengan demikian, diperoleh $s_1s_2s_3xs_4, s_1s_2xs_3s_4, s_1xs_2s_3s_4 \in K(I)$. Jadi, $K(I)$ adalah ideal dari S.

Teorema 3.2.6 *Misalkan S adalah semiring quiner dan I adalah ideal prima dari S. Maka*
(1) *Jika K_I adalah ideal dari S dan memiliki sifat insersi, maka $\overline{K_I}$ adalah ideal dari S,*
(2) *Jika K_I adalah ideal semiprima lengkap dari S, maka $K_I = \overline{K_I}$.*

Bukti. (1). Berdasarkan Definisi 3.2.1, diperoleh $\overline{K_I} \subseteq S$. Karena terdapat $n \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $(0SSS)^n0 = \{0\} \subseteq K_I$, maka $0 \in \overline{K_I}$ yang mengakibatkan $\overline{K_I} \neq \emptyset$. Selanjutnya, ambil sebarang $x_1, x_2 \in \overline{K_I}$. Maka terdapat $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $(x_1SSS)^{n_1}x_1 \subseteq K_I$ dan $(x_2SSS)^{n_2}x_2 \subseteq K_I$. Karena K_I adalah ideal dari S dan memiliki sifat insersi, maka

$$\begin{aligned}\left((x_1+x_2)SSS\right)^{n_1+n_2}(x_1+x_2) &= (x_1SSS + x_2SSS)^{n_1+n_2}(x_1+x_2)\\
&= (x_1SSS + x_2SSS)^{n_1+n_2}x_1 + (x_1SSS + x_2SSS)^{n_1+n_2}x_2\\
&= (x_1SSS)^{n_1+n_2}x_1 + (n_1+n_2-1)(x_1SSS)^{n_1+n_2-1}x_2SSSx_1 + \cdots +\\
&\quad (n_1+n_2-1)x_1SSS(x_2SSS)^{n_1+n_2-1}x_1 + (x_2SSS)^{n_1+n_2}x_1 +\\
&\quad (x_1SSS)^{n_1+n_2}x_2 + (n_1+n_2-1)(x_1SSS)^{n_1+n_2-1}x_2SSSx_2 + \cdots +\\
&\quad (n_1+n_2-1)x_1SSS(x_2SSS)^{n_1+n_2-1}x_2 + (x_2SSS)^{n_1+n_2}x_2\\
&= ((x_1SSS)^{n_1}x_1)(x_1)^{n_2-1}(SSS)^{n_2}x_1 +\\
&\quad (n_1+n_2-1)((x_1SSS)^{n_1}x_1)(x_1)^{n_2-2}(SSS)^{n_2-1}x_2SSSx_1 + \cdots +\\
&\quad (n_1+n_2-1)x_1SSS((x_2SSS)^{n_2}x_2)(x_2)^{n_1-2}(x_2SSS)^{n_1-1}x_1 +\\
&\quad ((x_2SSS)^{n_2}x_2)(x_2)^{n_1-1}(SSS)^{n_1}x_1 +\\
&\quad ((x_1SSS)^{n_1}x_1)(x_1)^{n_2-1}(SSS)^{n_2}x_2 +\\
&\quad (n_1+n_2-1)((x_1SSS)^{n_1}x_1)(x_1)^{n_2-2}(SSS)^{n_2-1}x_2SSSx_2 + \cdots +\\
&\quad (n_1+n_2-1)x_1SSS((x_2SSS)^{n_2}x_2)(x_2)^{n_1-2}(x_2SSS)^{n_1-1}x_2 +\\
&\quad ((x_2SSS)^{n_2}x_2)(x_2)^{n_1-1}(SSS)^{n_1}x_2\\
&\subseteq (K_I)(x_1)^{n_2-1}(SSS)^{n_2}x_1 + (n_1+n_2-1)(K_I)(x_1)^{n_2-2}(SSS)^{n_2-1}x_2SSSx_1 + \cdots +\\
&\quad (n_1+n_2-1)x_1SSS(K_I)(x_2)^{n_1-2}(x_2SSS)^{n_1-1}x_1 + (K_I)(x_2)^{n_1-1}(SSS)^{n_1}x_1 +\\
&\quad (K_I)(x_1)^{n_2-1}(SSS)^{n_2}x_2 + (n_1+n_2-1)(K_I)(x_1)^{n_2-2}(SSS)^{n_2-1}x_2SSSx_2 + \cdots +\\
&\quad (n_1+n_2-1)x_1SSS(K_I)(x_2)^{n_1-2}(x_2SSS)^{n_1-1}x_2 + (K_I)(x_2)^{n_1-1}(SSS)^{n_1}x_2\\
&\subseteq K_I + K_I + \cdots + K_I + K_I + K_I + K_I + \cdots + K_I + K_I \subseteq K_I.\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh $x_1 + x_2 \in \overline{K_I}$.
Selanjutnya, ambil sebarang $x \in \overline{K_I}$ dan $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$. Maka terdapat $n \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $(xSSS)^nx \subseteq K_I$. Karena K_I adalah ideal dari S, maka

$$\begin{aligned}\left((xs_1s_2s_3s_4)SSS\right)^n(xs_1s_2s_3s_4) &\subseteq (xSSSSSSS)^nxSSSS\\
&\subseteq (xSSS)^nxSSSS \subseteq (K_I)SSSS \subseteq K_I \text{ dan}\\
\left((s_1s_2s_3s_4x)SSS\right)^n(s_1s_2s_3s_4x) &\subseteq (SSSSxSSS)^nSSSSx\\
&= (SSSS)^n\underbrace{xSSSxSSSxSSS \ldots xSSSxSSS}_{xSSS \text{ sebanyak } n}SSSSx\\
&= (SSSS)^nxSSSxSSSxSSS \ldots xSSSxSS(SSSSS)x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\subseteq (SSSS)^n \underbrace{xSSSxSSSxSSS \dots xSSSxSSS}_{xSSS \text{ sebanyak } n} x \\
&= (SSSS)^n (xSSS)^n x \\
&\subseteq (SSSS)^n (K_I) \subseteq K_I.
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu, diperoleh $xs_1s_2s_3s_4, s_1s_2s_3s_4x \in \overline{K_I}$. Selanjutnya, karena S memiliki elemen identitas e, maka

$$
\begin{aligned}
\left((s_1xs_2s_3s_4)SSS\right)^n(s_1xs_2s_3s_4) &\subseteq (SxSSSSSS)^n SxSSS \\
&= (SeeexeSSSSSS)^n SeeexeSSS \\
&\subseteq (SSSSxSSS)^n SSSSxSSSS \\
&= (SSSS)^n \underbrace{xSSSxSSSxSSS \dots xSSSxSSS}_{xSSS \text{ sebanyak } n} SSSSxSSSS \\
&= (SSSS)^n xSSSxSSSxSSS \dots xSSSxSS(SSSSS)xSSSS \\
&\subseteq (SSSS)^n \underbrace{xSSSxSSSxSSS \dots xSSSxSSS}_{xSSS \text{ sebanyak } n} xSSSS \\
&= (SSSS)^n (xSSS)^n xSSSS \\
&\subseteq (SSSS)^n (K_I) SSSS \subseteq K_I, \\
\left((s_1s_2xs_3s_4)SSS\right)^n(s_1s_2xs_3s_4) &\subseteq (SSxSSSSS)^n SSxSS \\
&= (SSeexeeSSSSS)^n SSeexeeSS \\
&\subseteq (SSSSxSSS)^n SSSSxSSSS \\
&= (SSSS)^n \underbrace{xSSSxSSSxSSS \dots xSSSxSSS}_{xSSS \text{ sebanyak } n} SSSSxSSSS \\
&= (SSSS)^n xSSSxSSSxSSS \dots xSSSxSS(SSSSS)xSSSS \\
&\subseteq (SSSS)^n \underbrace{xSSSxSSSxSSS \dots xSSSxSSS}_{xSSS \text{ sebanyak } n} xSSSS \\
&= (SSSS)^n (xSSS)^n xSSSS \\
&\subseteq (SSSS)^n (K_I) SSSS \subseteq K_I, \\
\left((s_1s_2s_3xs_4)SSS\right)^n(s_1s_2s_3xs_4) &\subseteq (SSSxSSSS)^n SSSxS \\
&= (SSSexeeeSSSS)^n SSSexeeeS \\
&\subseteq (SSSSxSSS)^n SSSSxSSSS \\
&= (SSSS)^n \underbrace{xSSSxSSSxSSS \dots xSSSxSSS}_{xSSS \text{ sebanyak } n} SSSSxSSSS \\
&= (SSSS)^n xSSSxSSSxSSS \dots xSSSxSS(SSSSS)xSSSS \\
&\subseteq (SSSS)^n \underbrace{xSSSxSSSxSSS \dots xSSSxSSS}_{xSSS \text{ sebanyak } n} xSSSS \\
&= (SSSS)^n (xSSS)^n xSSSS \\
&\subseteq (SSSS)^n (K_I) SSSS \subseteq K_I.
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, diperoleh $s_1xs_2s_3s_4, s_1s_2xs_3s_4, s_1s_2s_3xs_4 \in \overline{K_I}$. Jadi, $\overline{K_I}$ adalah ideal dari S.

(2). Berdasarkan Proposisi 3.2.2, diperoleh $K_I \subseteq \overline{K_I}$. Selanjutnya, ambil sebarang $x \in \overline{K_I}$. Maka terdapat $n \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $(xSSS)^n x \subseteq K_I$. Perhatikan bahwa $x^{4n+1} \in (xSSS)^n x \subseteq K_I$. Karena K_I adalah ideal semiprima lengkap dari S, maka $x \in K_I$. Dengan demikian, diperoleh $\overline{K_I} \subseteq K_I$. Jadi, $K_I = \overline{K_I}$.

Definisi himpunan bagian khusus dari semiring quiner merupakan perumuman dan adaptasi dari definisi himpunan bagian khusus dari semiring terner yang telah diteliti oleh Dutta dan Mandal pada [3]. Sebagai contoh pada [3] didefinisikan salah satu himpunan bagian khusus dari semiring terner S untuk setiap ideal prima I yaitu $K(I) = \{x \in S \mid xSSyS \subseteq P(S)$ untuk suatu $y \in I^C\}$. Maka pada penelitian ini dilakukan perumuman dan adaptasi dari definisi tersebut untuk semiring quiner S dan ideal prima I yaitu $K(I) = \{x \in S \mid xSSSSySSS \subseteq P(S)$ untuk suatu $y \in I^C\}$. Hal ini menyesuaikan dari definisi semiring quiner itu sendiri yang melibatkan 5 elemen pada operasi perkaliannya. Hal ini juga berlaku pada himpunan bagian khusus yang lain. Sifat-sifat yang diperoleh pada bagian ini juga merupakan perumuman dan adaptasi dari penelitian [3]. Hal yang membedakan adalah objek yang digunakan, yaitu semiring quiner yang merupakan perumuman dan adaptasi dari semiring terner.

4. KESIMPULAN

Semiring quiner merupakan perumuman dan adaptasi dari semiring terner, artinya semiring quiner mengembangkan dan memperluas konsep semiring terner dengan menambahkan elemen dan aturan operasinya. Semiring quiner mencakup semiring terner dalam ruang lingkupnya tetapi dengan struktur atau aturan yang lebih kompleks. Jika pada semiring terner hanya melibatkan 3 elemen pada operasi perkaliannya, maka pada semiring quiner terdapat 5 elemen yang terlibat. Pada semiring terner hanya terdapat 3 sifat distributif yaitu distributif kiri, tengah, dan kanan, sedangkan pada semiring quiner terdapat 5 sifat distributif. Akibatnya, himpunan bagian khusus dari semiring quiner juga merupakan perumuman dan adaptasi dari himpunan bagian khusus dari semiring terner. Pada penelitian ini, peneliti berhasil mendefinisikan dan membuktikan dengan rinci sifat-sifat yang berkaitan dengan semiring quiner dengan melakukan perumuman dan adaptasi dari sifat-sifat yang berlaku pada semiring terner.

REFERENCES

[1] Bashir, S., Ali Al-Shamiri, M. M., Khalid, S., & Mazhar, R., 2023. Regular and Intra-Regular Ternary Semirings in Terms of m-Polar Fuzzy Ideals. *Symmetry*, *15*(3), 591. https://doi.org/10.3390/sym15030591

[2] Birkenmeier, G. F., Heatherly, H. E., & Lee, E. K., 1992. Completely prime ideals and associated radicals. *Proc. Biennial Ohio State-Denison Conference*, 102–129. https://doi.org/10.1142/9789814535816

[3] Dutta, T. K., & Mandal, S., 2015. Some Characterizations of 2-primal Ternary Semiring. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, *39*(6), 769–783. http://www.seams-bull-math.ynu.edu.cn/archive.jsp

[4] Dutta, T., & Kar, S., 2003. On Regular Ternary Semirings. *Advances in Algebra*, 343–355. https://doi.org/10.1142/9789812705808_0027

[5] Ingale, K. J., Bendale, H. P., Bonde, D. R., & Chaudhari, J. N., 2022. ON K-REGULAR ADDITIVE TERNARY SEMIRINGS. *Journal of the Indian Mathematical Society*, *89*(1–2), 72–83. https://doi.org/10.18311/jims/2022/29309

[6] Janan, T., & Irawati, I., 2023. Characterizations of 2-Primal Ternary Semiring using Special Subsets of Ternary Semiring. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, *20*(1), 97–105. http://dx.doi.org/10.12962/limits.v20i1.12965

[7] Lehmer, D. H., 1932. A ternary analogue of abelian groups. *American Journal of Mathematics*, *54*(2), 329–338. https://doi.org/10.2307/2370997

[8] Lister, W. G., 1971. Ternary rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, *154*, 37–55.

[9] Manivasan, S., & Parvathi, S. 2022. The dissertation on P-prime bi-ideal in ternary semirings. *AIP Conference Proceedings*, *2516*(1). https://doi.org/10.1063/5.0108621

[10] Muhiuddin, G., Catherine Grace John, J., Elavarasan, B., Porselvi, K., & Al-Kadi, D., 2022.

Properties of k-hybrid ideals in ternary semiring. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, *42*(6), 5799–5807. https://doi.org/10.3233/JIFS-212311

[11] Palanikumar, M., & Arulmozhi, K., 2021a. New approach towards A-ideals in Ternary Semirings. *Annals of Communications in Mathematics*, *4*(2), 114. https://doi.org/10.62072/acm.2021.040203

[12] Palanikumar, M., & Arulmozhi, K., 2021b. *ON VARIOUS TRI-IDEALS IN TERNARY SEMIRINGS*. *11*(1), 79–90. https://doi.org/10.7251/BIMVI2101079P

[13] Paykan, K., & Moussavi, A., 2020. Some characterizations of 2-primal skew generalized power series rings. *Communications in Algebra*, *48*(6), 2346–2357. https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1713326

[14] Santiago, M. L., 1983. Some contributions to the study of ternary semigroups and semiheaps. *PhD Diserrtation*, *University of Madras*.

[15] Sunitha, T., Reddy, U. N., & Shobhalatha, G., 2021. A note on full k-ideals in ternary semirings. *Indian Journal of Science and Technology*, *14*(21), 1786–1790. https://doi.org/10.17485/IJST/v14i21.150