J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 14, No. 1, 1-11, Juli 2017

p-ISSN: 1858-1382
e-ISSN: 2614-8811

Analisis Kestabilan Model Tekanan Penduduk Antar Dua Habitat Dengan Pola Migrasi Dan Pengendalian

Theresia Alex Rima, Budi Nurwahyu †

Abstrak

Dalam paper ini, sebuah model Matematika yang menggunakan tiga komponen yaitu populasi penduduk, komponen habitat dan komponen intensitas pengendalian penduduk dikaji dengan tujuan untuk mempelajari bagaimana kelangsungan kehidupan di suatu habitat, dalam hal ini dengan mempertimbangkan migrasi penduduk antar dua habitat. Metode yang digunakan dalam penyelesaian model ini adalah dengan menggunakan matriks Jacobi dan Aturan Tanda Descartes, untuk menganalisis kestabilan dari titik kesetimbangannya. Dengan asumsi-asumsi yang diberikan, akan dilakukan analisis kestabilan titik setimbang dari model tersebut.

Keywords: Kestabilan, titik kesetimbangan, pola migrasi penduduk.

1. Pendahuluan

Suatu populasi makhluk hidup membutuhkan suatu habitat sebagai tempat untuk melangsungkan kehidupannya. Keseimbangan kehidupan di suatu habitat sangatlah penting. Jika populasi dalam habitat ini tumbuh tanpa batasan, maka akan membawa dampak bagi habitatnya.

Salah satu komponen populasi makhluk hidup yang terpenting adalah populasi penduduk. Rusaknya suatu habitat dapat disebabkan oleh laju pertumbuhan penduduk yang begitu pesat. Peningkatan jumlah penduduk yang tak terkendali itu akan mendatangkan suatu masalah yang serius. Migrasi penduduk dari suatu habitat ke habitat yang lain adalah salah satu upaya untuk tetap bertahan hidup yang mana akan berdampak bagi keseimbangan habitat. Dalam mempertahankan keseimbangan kehidupan di suatu habitat, diperlukan suatu langkah untuk menekan laju pertumbuhan penduduk yang begitu pesat, misalnya dengan adanya Program Keluarga Berencana (KB). Dengan adanya upaya mengontrol laju pertumbuhan penduduk ini, diharapkan agar keseimbangan kehidupan di suatu habitat dapat dipertahankan. Selain itu, juga diupayakan adanya perbaikan pada lingkungan habitat.

Masalah yang akan dibahas pada makalah ini adalah bagaimana menganalisis titik kesetimbangan dari model tekanan penduduk antar dua habitat, yaitu menentukan syarat cukup kestabilan dari solusi setimbangnya

2. Model Dua Habitat, Dua Penduduk dan Upaya Pengendaliannya

Model tekanan penduduk antar dua habitat dengan pola migrasi dan pengendalian yang akan dikaji dalam bab ini mempunyai bentuk umum sebagai berikut

$$\frac{dB_1}{dt} = k_1 B_1 - a_1 I_1 B_1$$

$$\frac{dI_1}{dt} = t_1\left(1 - \frac{I_1}{L_1}\right) I_1 + b_1 I_1 B_1 + \beta I_2 - \alpha I_1 - \gamma_1 F_1 I_1$$

† *Mahasiswa Tugas Akhir pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar*

$$\frac{dF_1}{dt} = c_1 I_1 - \eta_1 F_1$$

$$\frac{dB_2}{dt} = k_2 B_2 - a_2 I_2 B_2$$

$$\frac{dI_2}{dt} = t_2\left(1 - \frac{I_2}{L_2}\right) I_2 + b_2 I_2 B_2 + \alpha I_1 - \beta I_2 - \gamma_2 F_2 I_2$$

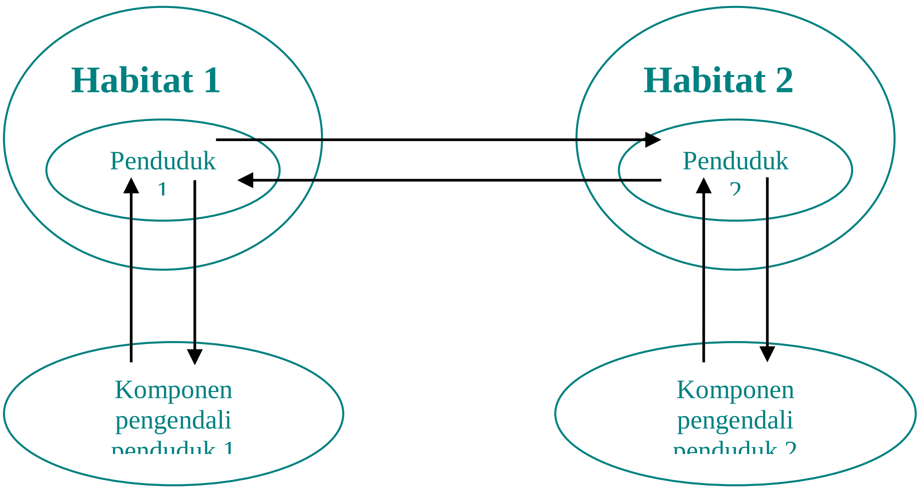
$$\frac{dF_2}{dt} = c_2 I_2 - \eta_2 F_2$$

dimana

$B_1(t)$: kepadatan habitat satu pada saat t
$B_2(t)$: kepadatan habitat dua pada saat t
$I_1(t)$: kepadatan penduduk satu pada saat t
$I_2(t)$: kepadatan penduduk dua pada saat t
$F_1(t)$: Intensitas upaya pengendalian penduduk satu pada saat t
$F_2(t)$: Intensitas upaya pengendalian penduduk dua pada saat t
k_i : faktor penunjang kehidupan pada habitat i (usaha perbaikan pada habitat)
a_i : tingkat kerusakan habitat i dengan adanya penduduk i
t_i : koefisien angka pertumbuhan dari penduduk i
L_i : daya dukung alam (carrying capacity) pada habitat i berupa keterbatasan tempat, makanan, dan lain-lain
b_i : koefisien bertambahnya jumlah penduduk i jika menempati habitat i
α : proporsi migrasi penduduk satu
β : proporsi migrasi penduduk dua
c_i : proporsi jumlah penduduk i
η_i : besarnya upaya pengendalian penduduk i yang dilakukan

$k_i>0$, $a_i>0$, $t_i>0$, $L_i>0$, $b_i>0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $c_i>0$, $\eta_i > 0$, $i = 1,2$.

Model di atas dapat digambarkan dalam diagram kompartemen dibawah ini.



Asumsi-asumsi untuk model yang digunakan sebagai berikut :

1. Populasi habitat pada awalnya hanya dipengaruhi oleh kondisi awal habitat dan besarnya populasi penduduk yang menempatinya.

2. Populasi penduduk merupakan persamaan logistik yang hanya bergantung pada kondisi habitat dan besarnya penduduk yang bermigrasi.
3. Keberadaan populasi lain dalam habitat diabaikan. Penduduk satu yang bermigrasi semuanya ke habitat dua, sebaliknya penduduk dua yang bermigrasi semuanya ke habitat satu.

3. Menentukan Titik Kesetimbangan

$$\frac{dB_1}{dt} = k_1 B_1 - a_1 I_1 B_1 \tag{1}$$

$$\frac{dI_1}{dt} = t_1\left(1 - \frac{I_1}{L_1}\right) I_1 + b_1 I_1 B_1 + \beta I_2 - \alpha I_1 - \gamma_1 F_1 I_1 \tag{2}$$

$$\frac{dF_1}{dt} = c_1 I_1 - \eta_1 F_1 \tag{3}$$

$$\frac{dB_2}{dt} = k_2 B_2 - a_2 I_2 B_2 \tag{4}$$

$$\frac{dI_2}{dt} = t_2\left(1 - \frac{I_2}{L_2}\right) I_2 + b_2 I_2 B_2 + \alpha I_1 - \beta I_2 - \gamma_2 F_2 I_2 \tag{5}$$

$$\frac{dF_2}{dt} = c_2 I_2 - \eta_2 F_2 \tag{6}$$

Titik kesetimbangan dari model tekanan penduduk antar dua habitat dapat ditentukan ketika tidak ada perubahan laju kepadatan habitat, pertumbuhan penduduk dan intensitas usaha pengendalian penduduk, atau dapat dituliskan :

$$\frac{dB_1}{dt} = \frac{dI_1}{dt} = \frac{dF_1}{dt} = \frac{dB_2}{dt} = \frac{dI_2}{dt} = \frac{dF_2}{dt} = 0$$

Dari model di atas diasumsikan ada lima titik kesetimbangan, yaitu : $\boldsymbol{E_1}$ **(0, 0, 0, 0, 0, 0),** $\boldsymbol{E_2}$ **(0, 0,** $\boldsymbol{I_1^*, I_2^*, F_1^*, F_2^*}$**),** $\boldsymbol{E_3}$ **(**$\boldsymbol{B_1^*, B_2^*, I_1^*, I_2^*}$**, 0, 0),** $\boldsymbol{E_4}$ **(**$\boldsymbol{B_1^*, B_2^*}$**, 0, 0,** $\boldsymbol{F_1^*, F_2^*}$**)** dan $\boldsymbol{E_5}$ **(**$\boldsymbol{B_1^*, B_2^*, I_1^*, I_2^*, F_1^*, F_2^*}$**)**. Jelas E_1 dan E_4 ada. Jadi $\boldsymbol{E_2}$ **(0, 0,** $\boldsymbol{I_1^*, I_2^*, F_1^*, F_2^*}$**).**

$$\frac{dF_1}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 I_1 - \eta_1 F_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_1 = \frac{c_1 I_1}{\eta_1} \tag{7}$$

$$\frac{dI_1}{dt} = 0 \Leftrightarrow t_1\left(1 - \frac{I_1}{L_1}\right) I_1 + b_1 I_1 B_1 + \beta I_2 - \alpha I_1 - \gamma_1 F_1 I_1 = 0 \tag{8}$$

Substitusi $B_1 = 0$ dari (7) ke (8) diperoleh

$$t_1\left(1 - \frac{I_1}{L_1}\right) I_1 + b_1 I_1 0 \;\; + \beta I_2 - \alpha I_1 - \gamma_1 \frac{c_1 I_1}{\eta_1} \;\; I_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t_1\left(1 - \frac{I_1}{L_1}\right) I_1 + \beta I_2 - \alpha I_1 - \gamma_1 \frac{c_1}{\eta_1} \;\; I_1^2 = 0 \tag{9}$$

$$\frac{dF_2}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 I_2 - \eta_2 F_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_2 = \frac{c_2 I_2}{\eta_2} \tag{10}$$

$$\frac{dI_2}{dt}=0 \Leftrightarrow t_2\left(1-\frac{I_2}{L_2}\right)I_2+b_2I_2B_2+\alpha I_1-\beta I_2-\gamma_2F_2I_2=0 \quad (11)$$

Substitusi $B_2 = 0$ dan persamaan (10) ke (11), diperoleh

$$t_2\left(1-\frac{I_2}{L_2}\right)I_2+b_2I_2 0+\alpha I_1-\beta I_2-\gamma_2\frac{c_2I_2}{\eta_2}I_2=0$$

$$\Leftrightarrow t_2\left(1-\frac{I_2}{L_2}\right)I_2+\alpha I_1-\beta I_2-\gamma_2\frac{c_2}{\eta_2}I_2^2=0 \quad (12)$$

Eliminasi (9) & (12) menghasilkan

$$t_1\left(1-\frac{I_1}{L_1}\right)I_1+t_2\left(1-\frac{I_2}{L_2}\right)I_2-\frac{\gamma_1c_1}{\eta_1}I_1^2-\frac{\gamma_2c_2}{\eta_2}I_2^2=0$$

$$\Leftrightarrow t_1I_1-\frac{t_1}{L_1}I_1^2+t_2I_2-\frac{t_2}{L_2}I_2^2-\frac{\gamma_1c_1}{\eta_1}I_1^2-\frac{\gamma_2c_2}{\eta_2}I_2^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad t_1I_1+t_2I_2-\left(\frac{t_1}{L_1}+\frac{\gamma_1c_1}{\eta_1}\right)I_1^2-\left(\frac{t_2}{L_2}+\frac{\gamma_2c_2}{\eta_2}\right)I_2^2=0 \quad (13)$$

***Teorema* 1.** *Berdasarkan persamaan* (13), *jika kondisi di bawah ini terpenuhi yaitu*

(*i*). $I_i^* < \dfrac{t_iL_i\eta_i}{t_i\eta_i+\gamma_ic_iL_i}$ *dan*

(*ii*). $t_i < \dfrac{t_i}{L_i}+\dfrac{\gamma_ic_i}{\eta_i}$, $\forall$ i=1,2

maka titik kesetimbangan E_2 ada.

- $\boldsymbol{E_3\,(B_1^*, B_2^*, I_1^*, I_2^*, 0, 0)}$

$$\frac{dB_1}{dt}=0 \quad\Leftrightarrow\quad k_1B_1-a_1I_1B_1=0 \quad\Leftrightarrow\quad I_1=\frac{k_1}{a_1} \quad (14)$$

Substitusi (14) dan $F_1 = 0$ ke (8) diperoleh

$$t_1\left(1-\frac{k_1}{a_1L_1}\right)\frac{k_1}{a_1}+b_1\frac{k_1}{a_1}B_1+\beta I_2-\alpha\frac{k_1}{a_1}-\gamma_1.0.\frac{k_1}{a_1}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t_1-\frac{k_1t_1}{a_1L_1}-\alpha\right)\frac{k_1}{a_1}+\frac{b_1k_1}{a_1}B_1+\beta I_2=0 \quad (15)$$

$$\frac{dB_2}{dt}=0 \quad\Leftrightarrow\quad k_2B_2-a_2I_2B_2=0 \quad\Leftrightarrow\quad I_2=\frac{k_2}{a_2} \quad (16)$$

Substitusi (16) dan $F_2 = 0$ ke (11), diperoleh

$$\left(t_2-\frac{k_2t_2}{a_2L_2}-\beta\right)\frac{k_2}{a_2}+\frac{b_2k_2}{a_2}B_2+\alpha I_1=0 \qquad (17)$$

Substitusi (14) ke (17) diperoleh

$$\left(t_2-\frac{k_2t_2}{a_2L_2}-\beta\right)\frac{k_2}{a_2}+\frac{b_2k_2}{a_2}B_2+\alpha\frac{k_1}{a_1}=0 \qquad (18)$$

Substitusi (16) ke (15) diperoleh

$$\left(t_1-\frac{k_1t_1}{a_1L_1}-\alpha\right)\frac{k_1}{a_1}+\frac{b_1k_1}{a_1}B_1+\beta\frac{k_2}{a_2}=0 \qquad (19)$$

Eliminasi (18) dan (19) menghasilkan

$$\left(t_1-\frac{k_1t_1}{a_1L_1}\right)\frac{k_1}{a_1}+\frac{b_1k_1}{a_1}B_1+\left(t_2-\frac{k_2t_2}{a_2L_2}\right)\frac{k_2}{a_2}+\frac{b_2k_2}{a_2}B_2=0 \qquad (20)$$

***Teorema* 2.** *Berdasarkan persamaan* (20), *jika kondisi di bawah ini terpenuhi yaitu*

(i) $a_iL_i > k_i$ dan

(ii) $t_i < \dfrac{a_i}{k_i}+\dfrac{k_it_i}{a_iL_i}$, $\forall$ i=1,2

maka titik kesetimbangan E_3 ada.

- ***E_5 ($B_1^*, B_2^*, I_1^*, I_2^*, F_1^*, F_2^*$)***

Substitusi persamaan (14) ke (7) diperoleh

$$F_1=\frac{c_1k_1}{\eta_1a_1} \qquad (21)$$

Substitusi (14) dan (21) ke persamaan (8), diperoleh

$$t_1\left(1-\frac{k_1}{a_1L_1}\right)\frac{k_1}{a_1}+b_1\frac{k_1}{a_1}B_1+\beta I_2-\alpha\frac{k_1}{a_1}-\gamma_1\frac{c_1k_1}{\eta_1a_1}\frac{k_1}{a_1}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t_1-\frac{k_1t_1}{a_1L_1}-\alpha-\frac{\gamma_1c_1k_1}{\eta_1a_1}\right)\frac{k_1}{a_1}+\frac{b_1k_1}{a_1}B_1+\beta I_2=0 \qquad (22)$$

Substitusi (16) ke (10) diperoleh

$$F_2=\frac{c_2k_2}{\eta_2a_2} \qquad (23)$$

Substitusi (16) dan (23) ke (11) diperoleh

$$t_2\left(1-\frac{k_2}{a_2L_2}\right)\frac{k_2}{a_2}+b_2\frac{k_2}{a_2}B_2+\alpha I_1-\beta\frac{k_2}{a_2}-\gamma_2\frac{c_2k_2}{\eta_2a_2}\frac{k_2}{a_2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t_2-\frac{k_2t_2}{a_2L_2}-\beta-\frac{\gamma_2c_2k_2}{\eta_2a_2}\right)\frac{k_2}{a_2}+\frac{b_2k_2}{a_2}B_2+\alpha I_1=0 \qquad (24)$$

Substitusi (14) ke (24) diperoleh

$$\left(t_2 - \frac{k_2 t_2}{a_2 L_2} - \beta - \frac{\gamma_2 c_2 k_2}{\eta_2 a_2}\right)\frac{k_2}{a_2} + \frac{b_2 k_2}{a_2} B_2 + \alpha \frac{k_1}{a_1} = 0 \qquad (25)$$

Substitusi (16) ke (22) diperoleh

$$\left(t_1 - \frac{k_1 t_1}{a_1 L_1} - \alpha - \frac{\gamma_1 c_1 k_1}{\eta_1 a_1}\right)\frac{k_1}{a_1} + \frac{b_1 k_1}{a_1} B_1 + \beta \frac{k_2}{a_2} = 0 \qquad (26)$$

Eliminasi (25) & (26) menghasilkan

$$\left(t_2 - \frac{k_2 t_2}{a_2 L_2} - \frac{\gamma_2 c_2 k_2}{\eta_2 a_2}\right)\frac{k_2}{a_2} + \left(t_1 - \frac{k_1 t_1}{a_1 L_1} - \frac{\gamma_1 c_1 k_1}{\eta_1 a_1}\right)\frac{k_1}{a_1} + \frac{b_2 k_2}{a_2} B_2 + \frac{b_1 k_1}{a_1} B_1 = 0 \quad (27)$$

Dengan menggunakan simulasi pada software Maple diperoleh B_1 dan B_2 yang memenuhi persamaan (27) yaitu

$$B_1 = \frac{-\eta_1 t_1 k_1 L_1 a_1 a_2 + \eta_1 t_1 k_1^2 a_2 - \eta_1 \beta\, k_2 L_1 a_1^2 + \eta_1 \alpha k_1 L_1 a_2 a_1 + \gamma_1 k_1^2 L_1 a_2 c_1}{\eta_1 b_1 k_1 L_1 a_2 a_1}$$

$$B_2 = \frac{-\eta_2 t_2 k_2 L_2 a_2 a_1 + \eta_2 t_2 k_2^2 a_1 - \eta_2 \alpha\, k_1 L_2 a_2^2 + \eta_2 \beta k_2 L_2 a_2 a_1 + \gamma_2 k_2^2 L_2 a_1 c_2}{\eta_2 b_2 k_2 L_2 a_2 a_1}$$

***Teorema* 3.** *Jika kondisi di bawah ini terpenuhi yaitu*

(i) $k_1 > a_1 L_1$, $k_2 > a_2 L_2$ *dan*

(ii) $\alpha k_1 a_2 > k_2 \beta a_1$

maka titik kesetimbangan E_5 *ada.*

Jadi titik kesetimbangan yang akan dianalisis kestabilannya adalah $\boldsymbol{E_5}$ **(**$\boldsymbol{B_1^*}$**,** $\boldsymbol{B_2^*}$**,** $\boldsymbol{I_1^*}$**,** $\boldsymbol{I_2^*}$**,** $\boldsymbol{F_1^*}$**,** $\boldsymbol{F_2^*}$**),** dimana

$$B_1^* = \frac{-\eta_1 t_1 k_1 L_1 a_1 a_2 + \eta_1 t_1 k_1^2 a_2 - \eta_1 \beta\, k_2 L_1 a_1^2 + \eta_1 \alpha k_1 L_1 a_2 a_1 + \gamma_1 k_1^2 L_1 a_2 c_1}{\eta_1 b_1 k_1 L_1 a_2 a_1},$$

$$B_2^* = \frac{-\eta_2 t_2 k_2 L_2 a_2 a_1 + \eta_2 t_2 k_2^2 a_1 - \eta_2 \alpha\, k_1 L_2 a_2^2 + \eta_2 \beta k_2 L_2 a_2 a_1 + \gamma_2 k_2^2 L_2 a_1 c_2}{\eta_2 b_2 k_2 L_2 a_2 a_1},$$

$$I_1^* = \frac{k_1}{a_1}, \quad I_2^* = \frac{k_2}{a_2}, \quad F_1^* = \frac{c_1 I_1}{\eta_1}, \text{ dan } F_2^* = \frac{c_2 I_2}{\eta_2}$$

4. Analisis Kestabilan

Titik kesetimbangan yang akan dianalisis kestabilannya adalah E_5. Pandang sistem persamaan berikut :

$$\frac{dB_1}{dt} = \hat{f}_1 = f_1(B_1, B_2, I_1, I_2, F_1, F_2)$$
$$\frac{dB_1}{dt} = \hat{f}_2 = f_2(B_1, B_2, I_1, I_2, F_1, F_2)$$
$$\frac{dI_1}{dt} = \hat{f}_3 = f_3(B_1, B_2, I_1, I_2, F_1, F_2)$$
$$\frac{dI_1}{dt} = \hat{f}_4 = f_4(B_1, B_2, I_1, I_2, F_1, F_2)$$
$$\frac{dF_1}{dt} = \hat{f}_5 = f_5(B_1, B_2, I_1, I_2, F_1, F_2)$$
$$\frac{dF_1}{dt} = \hat{f}_6 = f_6(B_1, B_2, I_1, I_2, F_1, F_2)$$

Anggap **J** adalah matriks Jacobi yang dapat ditulis dalam bentuk

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial B_1} & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial B_2} & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial I_1} & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial I_2} & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial F_1} & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial F_2} \\ \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial B_1} & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial B_2} & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial I_1} & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial I_2} & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial F_1} & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial F_2} \\ \frac{\partial \hat{f}_3}{\partial B_1} & \frac{\partial \hat{f}_3}{\partial B_2} & \frac{\partial \hat{f}_3}{\partial I_1} & \frac{\partial \hat{f}_3}{\partial I_2} & \frac{\partial \hat{f}_3}{\partial F_1} & \frac{\partial \hat{f}_3}{\partial F_2} \\ \frac{\partial \hat{f}_4}{\partial B_1} & \frac{\partial \hat{f}_4}{\partial B_2} & \frac{\partial \hat{f}_4}{\partial I_1} & \frac{\partial \hat{f}_4}{\partial I_2} & \frac{\partial \hat{f}_4}{\partial F_1} & \frac{\partial \hat{f}_4}{\partial F_2} \\ \frac{\partial \hat{f}_5}{\partial B_1} & \frac{\partial \hat{f}_5}{\partial B_2} & \frac{\partial \hat{f}_5}{\partial I_1} & \frac{\partial \hat{f}_5}{\partial I_2} & \frac{\partial \hat{f}_5}{\partial F_1} & \frac{\partial \hat{f}_5}{\partial F_2} \\ \frac{\partial \hat{f}_6}{\partial B_1} & \frac{\partial \hat{f}_6}{\partial B_2} & \frac{\partial \hat{f}_6}{\partial I_1} & \frac{\partial \hat{f}_6}{\partial I_2} & \frac{\partial \hat{f}_6}{\partial F_1} & \frac{\partial \hat{f}_6}{\partial F_2} \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dapat ditentukan dalam bentuk $|J - \lambda I| = 0 = f(\lambda)$.

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial B_1} - \lambda & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial B_2} & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial I_1} & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial I_2} & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial F_1} & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial F_2} \\ \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial B_1} & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial B_2} - \lambda & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial I_1} & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial I_2} & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial F_1} & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial F_2} \\ \frac{\partial \hat{f}_3}{\partial B_1} & \frac{\partial \hat{f}_3}{\partial B_2} & \frac{\partial \hat{f}_3}{\partial I_1} - \lambda & \frac{\partial \hat{f}_3}{\partial I_2} & \frac{\partial \hat{f}_3}{\partial F_1} & \frac{\partial \hat{f}_3}{\partial F_2} \\ \frac{\partial \hat{f}_4}{\partial B_1} & \frac{\partial \hat{f}_4}{\partial B_2} & \frac{\partial \hat{f}_4}{\partial I_1} & \frac{\partial \hat{f}_4}{\partial I_2} - \lambda & \frac{\partial \hat{f}_4}{\partial F_1} & \frac{\partial \hat{f}_4}{\partial F_2} \\ \frac{\partial \hat{f}_5}{\partial B_1} & \frac{\partial \hat{f}_5}{\partial B_2} & \frac{\partial \hat{f}_5}{\partial I_1} & \frac{\partial \hat{f}_5}{\partial I_2} & \frac{\partial \hat{f}_5}{\partial F_1} - \lambda & \frac{\partial \hat{f}_5}{\partial F_2} \\ \frac{\partial \hat{f}_6}{\partial B_1} & \frac{\partial \hat{f}_6}{\partial B_2} & \frac{\partial \hat{f}_6}{\partial I_1} & \frac{\partial \hat{f}_6}{\partial I_2} & \frac{\partial \hat{f}_6}{\partial F_1} & \frac{\partial \hat{f}_6}{\partial F_2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

***Teorema* 4.** *Jika kondisi di bawah ini terpenuhi yaitu*

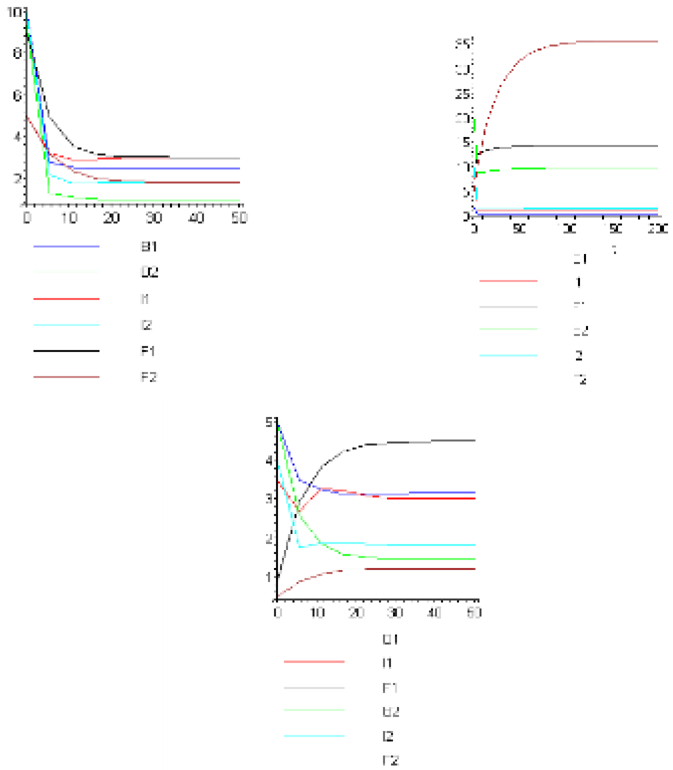
(*i*) $\beta > t_2, \alpha > t_1$,

(*ii*) $k_1 > L_1 a_1$, $k_2 > L_2 a_2$, *dan*

(*iii*) $b_2 I_2 B_2^* a_2 > \alpha\beta$

maka sistem akan stabil asimtotik, atau $F_2^* = \dfrac{c_2 I_2}{\eta_2}$

5. Simulasi Numerik



a. Model I b. Model II c. Model III

Gambar 1. Berbagai Model Hasil Simulasi.

Model I diperoleh dengan mensubstitusi konstanta di bawah ini ke persamaan pertama yang ada pada poin (2) di atas.

$t_1 = 0{,}01$ $L_1 = 0{,}1$ $k_1 = 0{,}6$ $b_1 = 0{,}7$ $\eta_1 = 0{,}3$

$t_2 = 0{,}02$ $L_2 = 0.12$ $k_2 = 0{,}9$ $b_2 = 0{,}9$ $\eta_2 = 0{,}2$

$\alpha = 0{,}5$ $a_1 = 0{,}2$ $c_1 = 0{,}3$ $\gamma_1 = 0{,}4$

$\beta = 0{,}5$ $a_2 = 0{,}5$ $c_2 = 0{,}2$ $\gamma_2 = 0{,}5$

dimana model sistem menjadi :

$$\frac{dB_1}{dt} = 0{,}6\, B_1 - 0{,}2\, I_1 B_1$$

$$\frac{dI_1}{dt} = 0{,}01\,(1 - 10\, I_1) I_1 + 0{,}7\, I_1 B_1 + 0{,}5\, I_2 - 0{,}5\, I_1 - 0{,}4\, F_1 I_1$$

$$\frac{dF_1}{dt} = 0{,}3\, I_1 - 0{,}3\, F_1$$

$$\frac{dB_2}{dt} = 0{,}9\, B_2 - 0{,}5\, I_2 B_2$$

$$\frac{dI_2}{dt} = 0{,}02\left(1 - 8{,}33\ I_2\right)I_2 + 0{,}9\ I_2 B_2 + 0{,}5\ I_1 - 0{,}5\ I_2 - 0{,}5\ F_2 I_2$$
$$\frac{dF_2}{dt} = 0{,}2\ I_2 - 0{,}2\ F_2$$

Dari Model I terlihat bahwa habitat 2 memiliki kualitas yang kurang baik bila dibandingkan dengan habitat 1. Hal ini dipengaruhi oleh besarnya laju pertumbuhan populasi 2, yaitu (0,02), yang lebih besar bila dibandingkan dengan laju pertumbuhan populasi 1 (0,01). Selain itu, kualitas habitat ini juga dipengaruhi oleh tingkat kepadatan, dimana yang kepadatan habitat 2 lebih tinggi sebesar 0,5 bila dibandingkan dengan tingkat kepadatan populasi 1 yang hanya sebesar 0,2 di mana akan berpengaruh terhadap tingkat kualitas suatu habitat. Meskipun usaha perbaikan yang dilakukan terhadap habitat 2 cukup besar, hal ini tidak terlalu berpengaruh karena laju pertumbuhan populasi yang tinggi. Proporsi populasi kedua habitat yang bermigrasi sebanding/sama besar, dan hal ini tidak terlalu berpengaruh terhadap kedua habitat. Selain itu pengambilan syarat awal (t = 0) juga memiliki pengaruh. Di sini, syarat awal yang di ambil adalah $I_1(0)$ =5, $I_2(0)$ = 10, $B_1(0)$ = 10, $B_2(0)$ = 9,36, $F_1(0)$ =9, $F_2(0)$ = 5. Habitat 2, kepadatan yang ada hanya 9,36, populasi yang menempati habitat sebesar10, dengan usaha perbaikan yang dilakukan hanya 5. Lain halnya dengan habitat 1 di mana yang tersedia sebesar 10, sedangkan populasi awal yang menempati hanya sebesar 5, usaha perbaikan yang dilakukan di awal sudah agak besar yaitu 9. Kestabilan sistem tecapai di sekitar t = 30, dimana I_1 = 3, I_2 = 1,8, B_1 = 2,41, B_2 = 0,94, F_1 = 3, F_2 = 1,8. Jelas sekali bahwa usaha perbaikan pada habitat 2 haruslah sangat besar agar kestabilan sistem tercapai.

Model II diperoleh dengan mensubstitusi konstanta di bawah ini ke persamaan pertama yang ada pada poin (2) di atas.

t_1 = 0,2 L_1 = 0,3 k_1 = 1 b_1 = 1 η_1 = 0,07
t_2 = 0, 6 L_2 = 0,1 k_2 = 1 b_2 = 1 η_2 = 0,04
α = 0,4 a_1 = 1 c_1 = 1 γ_1 = 0,02
β = 0,7 a_2 = 0,7 c_2 =1 γ_2 = 0,04

dimana model sistem menjadi :

$$\frac{dB_1}{dt} = B_1 - I_1 B_1$$
$$\frac{dI_1}{dt} = 0{,}2\ \left(1 - 3{,}33\ I_1\right)I_1 + I_1 B_1 + 0{,}7\ I_2 - 0{,}4\ I_1 - 0{,}02\ F_1 I_1$$
$$\frac{dF_1}{dt} = I_1 - 0{,}07\ F_1$$
$$\frac{dB_2}{dt} = B_2 - 0{,}7\ I_2 B_2$$
$$\frac{dI_2}{dt} = 0{,}6\left(1 - 10\ I_2\right)I_2 + I_2 B_2 + 0{,}4\ I_1 - 0{,}7\ I_2 - 0{,}04\ F_2 I_2$$
$$\frac{dF_2}{dt} = I_2 - 0{,}04\ F_2$$

Dari Model II terlihat bahwa habitat 1 memiliki kualitas yang kurang baik bahkan hampir rusak bila dibandingkan dengan habitat 2. Hal ini dipengaruhi oleh laju pertumbuhan populasi 1 yang sangat besar (0,6) bila dibandingkan dengan laju pertumbuhan populasi 2 (0,2). Jadi proporsi migrasi populasi 2 ke habitat 1 cukup besar yaitu 0,7 sedangkan proporsi migrasi populasi 1 hanya sebesar 0,4. Selain itu usaha perbaikan yang dilakukan pada habitat 2 untuk menekan laju penduduk sebesar 0,04 yang jauh lebih besar bila dibandingkan dengan usaha perbaikan yang dilakukan pada habitat 1 sebesar 0,02, dimana akan berpengaruh pada jumlah populasi yang bermigrasi. Selain itu pengambilan syarat awal (t = 0) juga memiliki pengaruh. Di sini syarat awal yang di ambil adalah $I_1(0)$ =10, $I_2(0)$ = 10, $B_1(0)$ = 2, $B_2(0)$ = 20, $F_1(0)$ =9, $F_2(0)$ = 5. Habitat 2 yang ada 20 sedangkan populasi yang menempati habitat sebesar10, usaha perbaikan yang dilakukan hanya 5. Lain halnya dengan habitat 1 di mana yang tersedia hanya sebesar 2 sedangkan populasi awal yang menempati sebesar 10. Hal ini turut mempengaruhi rusaknya habitat 1. Kestabilan sistem tecapai di sekitar t = 130, dimana I_1 = 1,2, I_2 = 1,3, B_1 = 0,16, B_2 = 9, F_1 = 14, F_2 = 35,1. Jadi terlihat bahwa untuk mencapai kestabilan populasi 1 harus ditekan jumlahnya dengan usaha yang cukup besar, dan dibutuhkan waktu yang cukup lama untuk memperbaiki habitat 1.

Model III diperoleh dengan mensubstitusi konstanta di bawah ini ke persamaan pertama yang ada pada poin (2) di atas.

$t_1 = 0{,}01$	$L_1 = 0{,}1$	$k_1 = 0{,}6$	$b_1 = 0{,}7$	$\eta_1 = 0{,}2$
$t_2 = 0{,}02$	$L_2 = 0.12$	$k_2 = 0{,}9$	$b_2 = 0{,}9$	$\eta_2 = 0{,}3$
$\alpha = 0{,}09$	$a_1 = 0{,}2$	$c_1 = 0{,}3$	$\gamma_1 = 0{,}5$	
$\beta = 0{,}7$	$a_2 = 0{,}5$	$c_2 = 0{,}2$	$\gamma_2 = 0{,}4$	

dimana model sistem menjadi :

$$\frac{dB_1}{dt} = 0{,}6\,B_1 - 0{,}2\,I_1B_1$$

$$\frac{dI_1}{dt} = 0{,}01\,(1-10\,I_1)I_1 + 0{,}7\,I_1B_1 + 0{,}7\,I_2 - 0{,}09\,I_1 - 0{,}5\,F_1I_1$$

$$\frac{dF_1}{dt} = 0{,}3\,I_1 - 0{,}2\,F_1$$

$$\frac{dB_2}{dt} = 0{,}9\,B_2 - 0{,}5\,I_2B_2$$

$$\frac{dI_2}{dt} = 0{,}02(1-8{,}33\,I_2)I_2 + 0{,}9\,I_2B_2 + 0{,}09\,I_1 - 0{,}7\,I_2 - 0{,}4\,F_2I_2$$

$$\frac{dF_2}{dt} = 0{,}2\,I_2 - 0{,}3\,F_2$$

Dari Model III terlihat bahwa habitat 2 memiliki kualitas yang kurang baik bila dibandingkan dengan habitat 1. Hal ini dipengaruhi oleh besarnya laju pertumbuhan populasi 2 lebih besar (0,02) bila dibandingkan dengan laju pertumbuhan populasi 1 (0,01). Selain itu juga dipengaruhi oleh tingkat kepadatan populasi 2 yang menempati habitat 2 lebih tinggi sebesar 0,5 bila dibandingkan dengan tingkat kepadatan populasi 1 yang hanya sebesar 0,2, dimana hal ini berpengaruh terhadap tingkat kualitas suatu habitat. Proporsi migrasi populasi 2 yang bermigrasi sebesar 0,7 sedangkan proporsi migrasi populasi 1 yang bermigrasi sebesar 0,09. Hal ini tidak terlalu berpengaruh terhadap kedua habitat, karena laju populasi 2 hanya 0,4 yang ditekan bila dibandingkan dengan besarnya penekanan pada laju pertumbuhan populasi 1 yang jauh lebih besar yaitu 0,5. Selain itu pengambilan syarat awal (t = 0) juga memiliki pengaruh. Di sini syarat awal yang di ambil adalah $I_1(0)$ =3,5, $I_2(0)$ = 4, $B_1(0)$ = 5, $B_2(0)$ = 5, $F_1(0)$ = 0,9, $F_2(0)$ = 0,5. Habitat 2 yang ada hanya 5 dengan populasi yang menempati habitat sebesar 4, dengan usaha perbaikan yang dilakukan sangat kecil hanya 0,5. Lain halnya dengan habitat 1 dimana yang tersedia sebesar 5, sedangkan populasi awal yang menempati hanya sebesar 3,5 sedangkan usaha perbaikan yang dilakukan di awal sudah agak besar yaitu 0,9.

Kestabilan sistem tecapai di sekitar t = 40, dimana I_1 = 3, I_2 = 1,8, B_1 = 3,2, B_2 = 1,5, F_1 = 4,5, F_2 = 1,2. Jelas sekali bahwa usaha perbaikan pada habitat 2 haruslah ditingkatkan agar kestabilan sistem tercapai.

6. Kesimpulan

Model dari efek perubahan habitat terhadap kelangsungan hidup spesies dikembangkan menjadi model tekanan penduduk antar dua habitat dengan pola migrasi dan pengendalian. Dari model tersebut diasumsikan terdapat titik kesetimbangan yang stabil asimtotik dengan analisis kestabilan menggunakan aturan tanda *Descartes* sehingga diperoleh keseimbangan kehidupan pada kedua habitat pada saat $t \to \infty$.

Jadi, model ini mampu menjelaskan kelangsungan kehidupan dalam suatu habitat dengan adanya migrasi penduduk antar dua habitat dan upaya untuk mengendalikan laju penduduk.

Daftar Pustaka

[1]. Deo, S.G. and Reghavendra, V., 1980, "*Ordinary Differential Aquations and Stability Theory*", Tata Mc Graw-Hill Publishing Company Limited, New Delhi.

[2]. Haberman, R., 1987, "*Mathematical Models: An Introduction to Applied Mathematics*", Prentice-Hall Inc., New York.

[3]. Shukla, J.B., Dubey, B., Freedman, H.I., 1996, "Effect of changing habitat on survival of species", *Journal of Ecological Modelling*, Departement of Mathematics, Indian Institute of Technology, Kanpur-208016, India.