

# Model Perubahan Sub Populasi (Menikah Dan Tidak Menikah) Dalam Populasi Manusia

Syamsuddin Toaha<sup>†</sup>

## Abstrak

Pada tulisan ini dibahas suatu model perubahan populasi manusia. Populasi manusia dibagi dalam tiga sub populasi yaitu; populasi pria yang tidak menikah, populasi wanita yang tidak menikah dan populasi yang menikah. Perubahan masing-masing sub populasi dipengaruhi oleh jumlah sub populasi lainnya. Beberapa asumsi dibuat untuk keperluan pemodelan. Model perubahan sub populasi itu dikonstruksi dan dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan diferensial orde satu. Syarat kewujudan suatu titik keseimbangan positif diberikan. Kestabilan titik keseimbangan positif dari model dianalisis dengan melinearkan model di sekitar titik keseimbangan dan dengan memeriksa nilai eigen dari persamaan karakteristik. Analisis kestabilan menunjukkan bahwa mungkin wujud suatu titik keseimbangan positif yang bermakna bahwa masing-masing jumlah sub populasi akan menuju ke suatu nilai positif tertentu.

**Keywords:** Model deterministik, populasi manusia, kestabilan, uji kestabilan Hurwitz, nilai eigen.

## 1. Pendahuluan

Banyak problem yang telah dikenali ternyata melibatkan perubahan kuantitas secara kontinu seperti kecepatan, percepatan dan peluruhan. Tetapi banyak juga fenomena yang berubah secara gradual (tidak kontinu terhadap waktu) seperti perubahan jumlah populasi manusia, perubahan jumlah pohon dalam suatu hutan, jumlah populasi binatang dalam suatu habitat tertentu dan sebagainya. Walaupun perubahan suatu kuantitas berubah secara diskrit, tetapi jika jumlahnya cukup besar, itu dapat dipandang sebagai suatu perubahan yang kontinu. Dalam bidang matematika biologi misalnya, perubahan populasi manusia dapat dipandang sebagai sesuatu yang kontinu terhadap waktu. Model populasi Malthus dan model Logistik yang merupakan model kontinu, telah digunakan untuk memodel pertumbuhan populasi manusia. Model Logistik yang dikaji oleh P.F Verhulst pada akhir tahun 1830-an (Haberman, 1998) digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk Amerika Serikat (Lipkin dan Smith, 2006).

Dalam Drayer (1993) telah dibahas suatu model pertumbuhan populasi dimana populasi tersebut dikelompokkan dalam 3 sub populasi yaitu populasi pria yang tidak kawin, populasi wanita yang tidak kawin dan populasi manusia yang kawin. Dalam model itu laju pertumbuhan masing-masing sub populasi hanya proporsional dengan jumlah populasi dalam sub populasi tersebut dan sub populasi lainnya. Model itu tidak mempertimbangkan pengaruh interaksi antara sub populasi maupun pengaruh interaksi dalam sub populasi itu pada pertumbuhan masing-masing sub populasi.

Dalam tulisan ini perubahan ketiga sub populasi akan di kaji lebih jauh dengan mempertimbangkan pengaruh interaksi antara sub populasi tersebut terhadap masing-masing perubahan sub populasi. Pertama-tama akan dipertimbangkan suatu model yang cukup kompleks dan selanjutnya karena kompleksitas model tersebut dibuat beberapa asumsi dan penyederhanaan sehingga diperoleh suatu model baru. Dari model kedua itu, diberikan suatu

<sup>†</sup> Staf Pengajar pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar

syarat kewujudan titik keseimbangan yang positif dan untuk analisis kestabilannya digunakan uji kestabilan Hurwitz dan nilai eigen.

## 2. Model Perubahan Sub Populasi Dalam Suatu Populasi

Dalam paper ini akan dibahas laju pertumbuhan jumlah populasi manusia dalam masing-masing sub populasi manusia dengan mempertimbangkan pengaruh interaksi masing-masing sub populasi pada laju pertumbuhan masing-masing sub populasi. Misalkan populasi manusia dibagi dalam tiga sub populasi, yaitu (i) populasi pria yang tidak kawin (ii) populasi wanita yang tidak kawin, dan (iii) populasi manusia yang kawin.

Untuk keperluan pemodelan perubahan masing-masing sub populasi, beberapa asumsi diberikan.

1. Perkawinan adalah monogami.
2. Bagi yang pernah kawin tapi menjadi single karena cerai atau karena kematian pasangannya, dikategorikan sebagai individu yang tidak kawin.
3. Kelahiran hanya terjadi dari populasi orang yang kawin.

Populasi yang kawin melahirkan anak-anak yang tidak/belum kawin dan sebaliknya, orang yang tidak kawin berkeinginan untuk kawin. Dengan demikian perubahan jumlah masing-masing dalam tiga sub populasi tersebut saling berhubungan. Untuk mengkonstruksi model perubahan masing-masing sub populasi, didefinisikan beberapa variabel

$p(t)$  = jumlah pria yang tidak kawin dalam populasi pada saat waktu  $t$ ,

$w(t)$  = jumlah wanita yang tidak kawin dalam populasi pada saat waktu  $t$ , dan

$k(t)$  = jumlah individu yang kawin dalam populasi pada saat waktu  $t$ .

Laju perubahan pada populasi  $p(t)$  bergantung pada: (i) laju kematian  $a_1$  pada populasi pria yang tidak kawin, (ii) laju kelahiran  $c_1$  pada pria (tentunya tidak kawin) yang berasal dari kelompok pasangan yang kawin, (iii) laju kematian  $d_1$  pada wanita yang kawin (menghasilkan pria yang jadi duda), (iv) interaksi antara sesama pria yang tidak kawin, dengan interaksi ini akan memberikan pengaruh kepada pria yang tidak kawin untuk melangsungkan perkawinan, (v) interaksi antara pria dan wanita yang tidak kawin, dengan interaksi ini akan memberikan pengaruh kepada pria yang tidak kawin untuk melangsungkan perkawinan, (vi) interaksi antara pria yang tidak kawin dengan kelompok orang yang kawin, dengan interaksi ini akan memberikan pengaruh kepada pria yang tidak kawin untuk melangsungkan perkawinan. Dengan itu diperoleh laju perubahan untuk populasi pria pada waktu  $t$  sebagai berikut

$$\frac{dp(t)}{dt} = -a_1 p(t) + (c_1 + d_1)k(t) - b_1 p(t)^2 - b_2 p(t)w(t) - b_3 p(t)k(t)$$

Laju perubahan pada populasi  $w(t)$  bergantung pada: (i) laju kematian  $a_2$  pada populasi wanita yang tidak kawin, (ii) laju kelahiran  $c_2$  pada wanita (tentunya tidak kawin) yang berasal dari kelompok pasangan yang kawin, (iii) laju kematian  $d_2$  pada pria yang kawin (menghasilkan wanita yang jadi janda), (iv) interaksi antara sesama wanita yang tidak kawin, dengan interaksi ini akan memberikan pengaruh kepada wanita yang tidak kawin untuk melangsungkan perkawinan, (v) interaksi antara wanita dan pria yang tidak kawin, dengan interaksi ini akan memberikan pengaruh kepada wanita yang tidak kawin untuk melangsungkan perkawinan, (vi) interaksi antara wanita yang tidak kawin dengan kelompok orang yang kawin, dengan interaksi ini akan memberikan pengaruh kepada wanita yang tidak

kawin untuk melangsungkan perkawinan. Dengan itu diperoleh laju perubahan untuk populasi wanita pada waktu  $t$  berikut

$$\frac{dw(t)}{dt} = -a_2w(t) + (c_2 + d_2)k(t) - e_1w(t)^2 - e_2w(t)p(t) - e_3w(t)k(t)$$

Laju perubahan pada populasi  $k(t)$  bergantung pada: (i) laju  $a_3$  pada populasi pria yang tidak kawin untuk kawin, (ii) laju  $a_4$  pada populasi wanita yang kawin untuk kawin, (iii) interaksi antara pria dan wanita yang tidak kawin, dengan interaksi ini akan memberikan pengaruh kepada pria dan wanita yang tidak kawin untuk melangsungkan perkawinan, (iv) interaksi antara pria/wanita yang tidak kawin dengan kelompok orang yang kawin, dengan interaksi ini akan memberikan pengaruh kepada pria/wanita yang tidak kawin untuk melangsungkan perkawinan (v) laju kematian  $d_3$  pada kelompok pria yang kawin (menghasilkan janda, tidak kawin), dan (vi) laju kematian  $d_4$  pada kelompok wanita yang kawin (menghasilkan duda, tidak kawin). Dengan itu diperoleh laju perubahan untuk populasi individu yang kawin pada waktu  $t$

$$\frac{dk(t)}{dt} = a_3p(t) + a_4w(t) + f_1p(t)w(t) + f_2p(t)k(t) + f_3w(t)k(t) - (d_3 + d_4)k(t)$$

Dari uraian di atas, selanjutnya diperoleh suatu model perubahan sub populasi manusia dalam bentuk sistem persamaan diferensial orde satu

$$\begin{aligned} \frac{dp(t)}{dt} &= -a_1p(t) + (c_1 + d_1)k(t) - b_1p(t)^2 - b_2p(t)w(t) - b_3p(t)k(t) \\ \frac{dw(t)}{dt} &= -a_2w(t) + (c_2 + d_2)k(t) - e_1w(t)^2 - e_2w(t)p(t) - e_3w(t)k(t) \\ \frac{dk(t)}{dt} &= a_3p(t) + a_4w(t) + f_1p(t)w(t) + f_2p(t)k(t) + f_3w(t)k(t) - (d_3 + d_4)k(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Matriks Jacobian untuk model (1) adalah

$$J_1 = \begin{pmatrix} -a_1 - 2b_1p - b_2w - b_3k & -b_2p & c_1 + d_1 - b_3p \\ -e_2w & -a_2 - 2e_1w - e_2p - e_3k & c_2 + d_2 - e_3w \\ a_3 + f_1w + f_2k & a_4 + f_1p + f_3k & f_2p + f_3w - d_3 - d_4 \end{pmatrix}$$

Dari model (1) diperoleh titik keseimbangan  $(p_0, w_0, k_0) = (0, 0, 0)$ , sementara syarat kewujudan suatu titik keseimbangan positif tidak mudah untuk ditentukan secara eksplisit karena sangat kompleks. Walaupun demikian, untuk model di atas kewujudan dan kestabilan titik keseimbangan positif akan diberikan dalam suatu simulasi.

**Contoh 1.** Diberikan nilai parameter untuk model (1) dengan nilai  $a_1 = 0.0011$ ,  $a_2 = 0.0012$ ,  $a_3 = 0.00011$ ,  $a_4 = 0.00012$ ,  $c_1 = 0.12$ ,  $c_2 = 0.11$ ,  $d_1 = 0.0013$ ,  $d_2 = 0.0011$ ,  $d_3 = 0.0051$ ,  $d_4 = 0.0042$ ,  $b_1 = 0.0011$ ,  $e_1 = 0.0013$ ,  $b_2 = 0.0012$ ,  $e_2 = 0.0013$ ,  $b_3 = 0.00011$ ,  $e_3 = 0.00015$ ,  $f_1 = 0.00012$ ,  $f_2 = 0.00011$  dan  $f_3 = 0.00013$ . Dengan nilai parameter ini, diperoleh tiga titik keseimbangan tidak negatif dan kestabilannya seperti diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Titik Keseimbangan Model (1) dan Kestabilannya

No.	Titik Keseimbangan	Nilai Eigen	Kestabilan
1	(0, 0, 0)	-0.01102, 0.00102, -0.00100	Titik pelana
2	(1.54933, 1.52823, 0.06265)	-0.01520, -0.00411, -0.00068	Stabil Asimptot
3	(22.9972, 19.0860, 10.0384)	-0.09698, -0.04859, 0.00148	Titik pelana

Dari Contoh 1 didapati ada tiga titik keseimbangan yang tidak negatif, namun untuk nilai parameter yang lain, mungkin hanya didapati dua titik keseimbangan yang tidak negatif. Titik keseimbangan yang pertama tidak stabil dengan dua nilai eigen yang bernilai negatif dan satu nilai eigen yang bernilai positif. Hal ini bermakna bahwa jika jumlah awal sub populasi cukup dekat dengan nol, maka dua sub populasi akan menuju ke nilai nol sementara satu sub populasi lainnya akan bertambah secara eksponensial. Titik keseimbangan yang ketiga dengan dua nilai eigen bernilai negatif dan satu bernilai positif, juga tidak stabil. Dengan bertambahnya waktu, dua sub populasi jumlahnya menuju ke titik keseimbangan tersebut, sementara satu sub populasi yang lain jumlahnya malah menjauhi titik keseimbangan tersebut. Titik keseimbangan yang kedua adalah stabil asimptotik dan merupakan suatu node. Hal ini bermakna bahwa jika jumlah awal masing-masing sub populasi cukup dekat dengan populasi keseimbangan, maka jumlah masing-masing sub populasi selanjutnya menuju ke populasi keseimbangan. Dengan demikian, dengan nilai parameter yang diberikan seperti di atas dan jumlah masing-masing sub populasi dekat dengan nilai populasi keseimbangan, maka ketiga sub populasi tersebut akan tetap wujud, dan tidak akan ada sub populasi yang akan punah ataupun berkembang tanpa batas. Pada keadaan ini jumlah populasi dan perbandingannya cenderung tetap

### 3. Penyederhanaan Model

Model perubahan sub populasi seperti yang diberikan pada model (1) sangat kompleks sehingga titik keseimbangan model tidak mudah untuk diperoleh secara umum. Dengan itu, kita menyederhanakan model dengan mengabaikan beberapa faktor yang membangun model tersebut. Dengan mengasumsikan bahwa  $b_1 = 0$ ,  $b_3 = 0$ ,  $e_1 = 0$ ,  $e_3 = 0$ ,  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 0$ ,  $f_3 = 0$ ,  $r_1 = c_1 + d_1$ ,  $r_2 = c_2 + d_2$ , dan  $r_3 = d_3 + d_4$ , model (1) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
 \frac{dp(t)}{dt} &= -a_1 p(t) + r_1 k(t) - b_2 p(t) w(t) \\
 \frac{dw(t)}{dt} &= -a_2 w(t) + r_2 k(t) - e_2 w(t) p(t) \\
 \frac{dk(t)}{dt} &= a_3 p(t) + a_4 w(t) - r_3 k(t).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Matriks Jacobian untuk model (2) adalah

$$J_2 = \begin{pmatrix} -a_1 - b_2 w & -b_2 p & r_1 \\ -e_2 w & -a_2 - e_2 p & r_2 \\ a_3 & a_4 & -r_3 \end{pmatrix}$$

Dari model (2) diperoleh titik keseimbangan  $(p_0, w_0, k_0) = (0, 0, 0)$  dan  $(p_1, w_1, k_1) = \left(\frac{A}{B}, \frac{A}{C}, \frac{AD}{BC}\right)$ , dengan

$$A = -a_1 r_3 a_2 + a_1 a_4 r_2 + a_3 r_1 a_2,$$

$$B = e_1 a_1 r_3 + a_3 r_2 b_2 - e_2 a_3 r_1,$$

$$C = e_2 r_1 a_4 + b_2 r_3 a_2 - b_2 a_4 r_2 \text{ dan}$$

$$D = a_3 b_2 a_2 + a_4 e_2 a_1.$$

Titik keseimbangan  $(p_1, w_1, k_1)$  berada pada oktan pertama jika  $A > 0$ ,  $B > 0$  dan  $C > 0$ .

Dalam analisis ini, kita fokus pada analisis titik keseimbangan  $(p_1, w_1, k_1)$  karena titik keseimbangan ini lebih menarik untuk di analisis ketimbang titik keseimbangan  $(p_0, w_0, k_0)$ . Pada titik keseimbangan  $(p_1, w_1, k_1)$  diperoleh matriks Jacobian

$$J_3 = \begin{pmatrix} -a_1 - b_2 w_1 & -b_2 p_1 & r_1 \\ -e_2 w_1 & -a_2 - e_2 p_1 & r_2 \\ a_3 & a_4 & -r_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Untuk analisis kestabilan titik keseimbangan  $(p_1, w_1, k_1)$  akan digunakan uji kestabilan Hurwitz (Jeffries, 1989; Willems, 1970). Persamaan karakteristik untuk matriks Jacobian (3) adalah

$$f(\lambda) = \lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_1 \lambda + p_0$$

dengan

$$p_0 = -b_2 w_1 r_2 a_4 - a_1 r_2 a_4 - a_3 r_1 a_2 + b_2 w_1 a_2 r_3 + e_2 w_1 r_1 a_4 + a_3 b_2 p_1 r_2 - a_3 r_1 e_2 p_1 + a_1 e_2 p_1 r_3 + a_1 a_2 r_3,$$

$$p_1 = -a_3 r_1 + e_2 p_1 r_3 + a_1 e_2 p_1 + a_2 r_3 + a_1 a_2 + b_2 w_1 r_3 + b_2 w_1 a_2 + a_1 r_3 - r_2 a_4 \text{ dan}$$

$$p_2 = a_1 + b_2 w_1 + a_2 + e_2 p_1 + r_3$$

Dengan menggunakan uji kestabilan Hurwitz, yaitu jika  $p_0 > 0$ ,  $p_1 > 0$ ,  $p_2 > 0$  dan  $p_2 p_1 - p_0 > 0$  maka titik keseimbangan  $(p_1, w_1, k_1)$  stabil asimptotik.

**Contoh 2.** Diberikan nilai parameter untuk model (2) dengan nilai  $a_1 = 0.051$ ,  $a_2 = 0.052$ ,  $a_3 = 0.00015$ ,  $a_4 = 0.00014$ ,  $r_1 = 0.11$ ,  $r_2 = 0.12$ ,  $r_3 = 0.00012$ ,  $b_2 = 0.00013$ , dan  $e_2 = 0.00014$ . Dengan nilai parameter ini diperoleh dua titik keseimbangan yang tidak negatif yaitu  $(p_0, w_0, k_0) = (0, 0, 0)$  dan  $(p_1, w_1, k_1) = (1574.83085, 1783.14607, 4048.87564)$ . Nilai eigen yang berhubungan dengan titik keseimbangan pertama adalah  $-0.051226$ ,  $0.000520$ ,  $-0.052414$ . Untuk titik keseimbangan yang kedua diperoleh  $p_0 = 0.00000139$ ,  $p_1 = 0.0259836939$ ,  $p_2 = 0.5554053081$  dan  $p_2 p_1 - p_0 = 0.01443008$ . Dengan menggunakan uji kestabilan Hurwitz disimpulkan bahwa titik keseimbangan  $(1574.83085, 1783.14607, 4048.87564)$  adalah stabil asimptotik. Lebih lanjut lagi diperoleh nilai eigen  $-0.503839$ ,  $-0.051512$ ,  $-0.000054$ .

Dengan demikian titik keseimbangan yang kedua stabil asimptotik dan merupakan suatu node.

Dari contoh 2 didapati bahwa titik keseimbangan yang pertama tidak stabil dengan dua nilai eigen yang bernilai negatif dan satu nilai eigen yang bernilai positif. Hal ini bermakna bahwa jika jumlah awal sub populasi cukup dekat dengan nol, maka dua sub populasi akan menuju ke nilai nol sementara satu sub populasi lainnya akan bertambah secara eksponensial. Sementara titik keseimbangan yang kedua stabil asimptotik dan merupakan suatu node. Hal ini bermakna bahwa jika jumlah awal masing-masing sub populasi cukup dekat dengan populasi keseimbangan, maka jumlah masing-masing sub populasi selanjutnya akan menuju ke populasi keseimbangan. Dengan demikian, dengan nilai parameter yang diberikan seperti di atas dan jumlah masing-masing sub populasi dekat dengan nilai populasi keseimbangan, maka ketiga sub populasi tersebut akan tetap wujud dan tidak akan ada sub populasi yang punah ataupun berkembang tanpa batas. Pada keadaan ini jumlah populasi akan menuju ke suatu nilai konstan 7406.852564 dengan perbandingan antara populasi pria yang tidak kawin, populasi wanita yang tidak kawin dan populasi yang kawin cenderung tetap, yaitu 1574.83085 : 1783.14607 : 4048.87564.

#### 4. Kesimpulan

Dengan mempertimbangkan pengaruh interaksi antara masing-masing sub populasi pada model pertumbuhan masing-masing sub populasi, diperoleh suatu model yang sangat mendekati fenomena sebenarnya. Namun model yang terhasil sangat kompleks sehingga kewujudan titik keseimbangan tidak mungkin lagi didapati secara eksplisit. Meskipun demikian, dengan membuat suatu simulasi, yaitu dengan mencoba nilai-nilai parameter, diperoleh suatu titik keseimbangan yang positif dan stabil. Dengan simulasi ini dapat disimpulkan bahwa jika suatu model populasi manusia mengikuti model (1), maka mungkin wujud suatu populasi keseimbangan yang positif dan stabil.

Pada model yang kedua, yaitu penyederhanaan dari model (1), didapati dua titik keseimbangan yang mungkin tidak negatif, yaitu titik keseimbangan  $(p_0, w_0, k_0) = (0, 0, 0)$  dan titik keseimbangan  $(p_1, w_1, k_1)$ . Titik keseimbangan yang kedua ini mungkin berada pada oktan pertama, bergantung pada nilai-nilai parameter model. Selanjutnya dengan menggunakan uji kestabilan Hurwitz didapati bahwa titik keseimbangan ini mungkin stabil. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa pada model (2) mungkin didapati suatu titik keseimbangan yang positif dan stabil yang bermakna bahwa ketiga-tiga sub populasi manusia tersebut dapat wujud untuk selamanya dengan jumlah populasi manusia menuju ke nilai konstan  $p_1 + w_1 + k_1$  dengan perbandingan populasi pria yang tidak kawin, populasi wanita yang tidak kawin dan populasi yang kawin adalah  $p_1 : w_1 : k_1$ .

#### Daftar Pustaka

- [1] Drayer, T.P., 1993, "Modelling with Ordinary Differential Equations". CRC Press, Inc., Boca Rotan.
- [2] Haberman, R., 1998, "Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow". SIAM, Philadelphia.
- [3] Jeffries, C., 1989, "Mathematical Model in Ecology". Birkhauser, Boston.
- [4] Lipkin, L., dan Smith, D., 2006, "Logistic growth model", <http://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/diffeq/logistic/logi1.html>. [19 April 2006]
- [5] Willems, J.L., 1970, "Stability Theory of Dynamical System". Thomas Nelson & Sons, London.