ISBN:1858-1382

J M S K

Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 10, No. 2, 124-131, Januari 2014

# Kelengkapan Ruang $\ell^p$ pada Ruang Norm-$n$

**Meriam[1], Naimah Aris[2], Muh Nur[3]**

**Abstrak**

Rumusan norm-$n$ pada $\ell^p$ merupakan perumuman dari rumusan norm-$n$ pada $\ell^2$. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa ruang $\ell^p$ merupakan ruang Banach-$n$ dengan mengambil sebarang barisan Cauchy di $\ell^p$ yang konvergen di $\ell^p$ dalam ruang norm-$n$.

**Kata Kunci** : ruang norm-$n$, ruang $\ell^p$, Barisan Cauchy, ruang Banach-$n$

**Abstract**

The formula of $n$-normed space in space $\ell^p$ is a generalization from the formula of $n$-normed space in space $\ell^2$. Furthermore, it is shown that space $\ell^p$ is $n$-Banach space by taking any Cauchy sequence in the space $\ell^p$ which convergent in $\ell^p$ on $n$-normed space.

**Keywords** : $n$-normed space, space $\ell^p$, Cauchy sequence, $n$-Banach space

## 1. Pendahuluan

Konsep ruang norm pertama kali dikemukakan oleh S. Banach, H. Hahn dan N. Wiener pada tahun 1922. Ruang norm, $(X, \|\cdot\|)$ adalah suatu ruang vektor $X$ dengan metrik yang didefinisikan oleh suatu norm $\|\cdot\|$. Kajian tentang ruang norm ini telah banyak dikaji oleh matematikawan, diantaranya adalah kajian tentang ruang norm-*2* yang pertama kali dikemukakan oleh Gähler pada pertengahan tahun 1960-an. Ruang norm-*2*, $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ adalah ruang yang dibangun dari ruang vektor $X$ yang mempunyai $\dim(X) \geq 2$ dengan metrik yang didefinisikan oleh suatu norm $\|\cdot,\cdot\|$.

Pada tahun 1969, Gähler kemudian mengembangkan ruang norm pada ruang vektor real $X$ dengan $\dim(X) \geq n$, dilambangkan dengan $\|\cdot, \dots, \cdot\|$ dan $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ disebut ruang norm-$n$. Tahun 2011, H. Gunawan dan Mashadi [6] dalam tulisannya menyatakan bahwa ruang norm-$n$ dengan $n \geq 2$ adalah suatu ruang norm-$(n-1)$, untuk kasus standar atau untuk ruang yang berdimensi hingga, norm-$(n-1)$ dapat diturunkan dari norm-$n$ dengan cara tertentu, kemudian kekonvergenan dan kelengkapan dari norm-$n$ ekuivalen dengan kekonvergenan dan kelengkapan yang diturunkan dari norm-$(n-1)$.

Kajian lain yang membahas tentang kelengkapan norm-$n$ dilakukan oleh Shelvi Ekariani dan Hendra Gunawan [2], dimana kekonvergenan dan kelengkapan barisan dalam norm-$n$ mengakibatkan kekonvergenan dan kelengkapan barisan dalam norm, begitu juga sebaliknya.

Kelengkapan ruang $\ell^p$ pada norm-$n$ sebelumnya telah dibahas oleh Hendra Gunawan [4] dalam tulisannya "*The Space of p-Summable Sequences and Its Natural n-Norm*". Kelengkapan tersebut ditunjukkan dengan mendefinisikan sebuah norm pada ruang $\ell^p$ dan membuktikan ekuivalensi norm tersebut dengan norm pada ruang $\ell^p$.[4]

Dari beberapa referensi tersebut diatas, penulis tertarik untuk mengkaji kembali bagaimana kelengkapan ruang $\ell^p$ di dalam ruang norm-$n$ dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa ruang $\ell^p$

[1] *Program S1 Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin*
[2] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin*
[3] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin*
[1,2,3] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10 Makassar*

merupakan ruang Banach-$n$, dengan metode yang sama dengan [1] dengan tujuan penulisan yaitu mengkaji definisi norm-$n$ pada ruang $\ell^p$, dan membuktikan kelengkapan ruang $\ell^p$ di ruang norm-$n$.

# 2. Tinjauan Pustaka

## 2.1 Ruang $\boldsymbol{\ell^p}$

Definisi 2.1.1

*Misal $p \geq 1$ adalah bilangan real. Setiap elemen dalam ruang $\ell^p$ adalah barisan $(x_n) = (x_1, x_2, \dots)$ dari bilangan real sedemikian sehingga $|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots$ konvergen, didefinisikan*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty, \qquad untuk\ p \geq 1. \tag{1}$$

Jika $(x_n)$ adalah barisan dalam bilangan real, maka yang diperoleh adalah ruang real $\ell^p$. Jika $(x_n)$ adalah barisan dalam bilangan kompleks, maka yang diperoleh adalah ruang kompleks $\ell^p$, namun yang akan dibahas adalah ruang real $\ell^p$.

## 2.2 Ruang Norm-*2*

Definisi 2.2.1

*Misalkan $X$ ruang vektor real berdimensi $d$ dengan $d \geq 2$. Norm-2 pada $X$ didefinisikan sebagai suatu pemetaan $\|\cdot,\cdot\|: X \times X \to \mathbb{R}$, sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ memenuhi sifat-sifat berikut :*

1. $\|x, y\| = 0$ *jika dan hanya jika $x$ dan $y$ bergantung linear*,
2. $\|x, y\| = \|y, x\|$,
3. $\|x, \alpha y\| = |\alpha| \|x, y\|$,
4. $\|x + y, z\| \leq \|x, z\| + \|y, z\|$

*Pasangan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ disebut ruang norm-2.*

Telah diketahui bahwa norm-*2* pada ruang $\ell^p$ untuk $1 \leq p < \infty$ dan $p \neq 2$ didefinisikan sebagai

$$\|x, y\| = \left[ \frac{1}{2} \sum_{j}^{\infty} \sum_{k}^{\infty} \left\| \begin{matrix} x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{matrix} \right\|^p \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Untuk menunjukkan bahwa ruang $\ell^p$ merupakan ruang norm-*2* dibutuhkan ketaksamaan Minkowski untuk deret double.

Teorema 2.2.2 (*Ketaksamaan Minkowski untuk Deret Double*)

*Jika $p \geq 1$ dan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dimana $(x_n), (y_n) \in \ell^p$ maka*

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x_n y_k + x_k y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x_n y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3}$$

Proposisi 2.2.3

*Jika fungsi $\|\cdot,\cdot\|:\ell^p \to \mathbb{R}$, didefinisikan*

$$\|x,y\| = \left[\frac{1}{2}\sum_{j}^{\infty}\sum_{k}^{\infty}\left\|\begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{vmatrix}\right\|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

*Maka $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|)$ adalah ruang norm-2.*

Ruang $\ell^p$ merupakan ruang yang lengkap pada ruang norm-*2* atau ruang Banach-*2*, yang telah dibuktikan pada [1].

# 3. Hasil dan Pembahasan

## 3.1 Ruang Norm-*n*

Definisi 3.1.1

*Misalkan $X$ adalah ruang vektor real berdimensi $d$ dimana $d \geq n$ serta $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Suatu fungsi bernilai real tak negatif yang didefinisikan sebagai suatu pemetaan $\|\cdot,\dots,\cdot\|: X \times \dots \times X \to \mathbb{R}$, sehingga untuk setiap $x_1, x_2, \dots, x_n, y, z \in X$ memenuhi sifat-sifat dibawah ini :*

1. $\|x_1, \dots, x_n\| = 0$ *jika dan hanya jika* $x_1, \dots, x_n$ *bergantung linear;*
2. $\|x_1, \dots, x_n\| = \|x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\|$, *untuk permutasi* $(i_1, \dots, i_n)$ *dari* $(1, \dots, n)$;
3. $\|x_1, \dots, x_{n-1}, \alpha x_n\| = |\alpha|\|x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\|$ *untuk setiap* $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $\|x_1, \dots, x_{n-1}, y + z\| \leq \|x_1, \dots, x_{n-1}, y\| + \|x_1, \dots, x_{n-1}, z\|$,

*disebut norm-$n$ di $X$. Pasangan $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ disebut ruang norm-$n$.*

Terinspirasi dari rumusan norm-$n$ pada $\ell^2$ didefinisikan norm-$n$ pada $\ell^p$, yaitu

$$\|x_1, \dots, x_n\|_p = \left(\frac{1}{n!}\sum_{j_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{j_n=1}^{\infty}\begin{vmatrix} x_{1j1} & x_{2j1} & \cdots & x_{nj1} \\ x_{1j2} & x_{2j2} & \cdots & x_{nj2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1jn} & x_{2j2} & \cdots & x_{njn} \end{vmatrix}^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4)$$

Proposisi 3.1.2

*Jika fungsi $\|\cdot,\dots,\cdot\|:\ell^p \to \mathbb{R}$, didefinisikan*

$$\|x_1, \dots, x_n\|_p = \left(\frac{1}{n!}\sum_{j_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{j_n=1}^{\infty}\begin{vmatrix} x_{1j1} & x_{2j1} & \cdots & x_{nj1} \\ x_{1j2} & x_{2j2} & \cdots & x_{nj2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1jn} & x_{2j2} & \cdots & x_{njn} \end{vmatrix}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

*maka $(\ell^p, \|\cdot,\dots,\cdot\|)$ adalah ruang norm-$n$.*

*Bukti :*

Ambil $(x_1, \dots, x_n) \in \ell^p$, akan ditunjukkan bahwa norm $\|x_1, \dots, x_n\|$ memenuhi sifat-sifat ruang norm-$n$. Akan ditunjukkan $\|x_1, \dots, x_n\| = 0$ jika dan hanya jika $x_1, \dots, x_n$ bergantung linear.

$(\Longrightarrow)$ Jika $\|x_1, \dots, x_n\| = 0$ maka $x_1, \dots, x_n$ bergantung linear, diketahui $\|x_1, \dots, x_n\| = 0$, sehingga

$$\left[\frac{1}{n!}\sum_{j_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{j_n=0}^{\infty}\left|\begin{vmatrix} x_{1j1} & x_{2j1} & \cdots & x_{nj1} \\ x_{1j2} & x_{2j2} & \cdots & x_{nj2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1jn} & x_{2jn} & \cdots & x_{njn} \end{vmatrix}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} = 0,$$

diperoleh

$$\begin{vmatrix} x_{1j1} & x_{2j1} & \cdots & x_{nj1} \\ x_{1j2} & x_{2j2} & \cdots & x_{nj2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1jn} & x_{2jn} & \cdots & x_{njn} \end{vmatrix} = 0.$$

Sehingga berdasarkan teorema bebas linear, $x_1, \dots, x_n$ bergantung linear.
($\Leftarrow$) Jika $x_1, \dots, x_n$ bergantung linear maka $\|x_1, \dots, x_n\| = 0$
Jika $x_1, \dots, x_n$ bergantung linear maka terdapat skalar-skalar $k_i \neq 0$ dimana $i = 1,2, \dots, n$, sedemikian sehingga

$$\begin{pmatrix} x_{ij1} \\ x_{ij2} \\ \vdots \\ x_{ijn} \end{pmatrix} = \left(-\frac{k_2}{k_i}\right)\begin{pmatrix} x_{2j1} \\ x_{2j2} \\ \vdots \\ x_{2jn} \end{pmatrix} + \cdots + \left(-\frac{k_n}{k_i}\right)\begin{pmatrix} x_{nj1} \\ x_{nj2} \\ \vdots \\ x_{njn} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

sehingga,

$$\|x_1, \dots, x_n\|_p$$

$$= \left[\frac{1}{n!}\sum_{j_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{j_n=0}^{\infty}\left|\begin{vmatrix} \left(-\frac{k_2}{k_i}\right)x_{2j1} + \cdots + \left(-\frac{k_n}{k_i}\right)x_{nj1} & x_{2j1} & \cdots & x_{nj1} \\ \left(-\frac{k_2}{k_i}\right)x_{2j2} + \cdots + \left(-\frac{k_n}{k_i}\right)x_{nj2} & x_{2j2} & \cdots & x_{nj2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(-\frac{k_2}{k_i}\right)x_{2jn} + \cdots + \left(-\frac{k_n}{k_i}\right)x_{njn} & x_{2jn} & \cdots & x_{njn} \end{vmatrix}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad (6)$$

Berdasarkan sifat penjumlahan determinan jika terdapat dua kolom sama atau sebanding maka nilai determinan $= 0$, sehingga dari persamaan (6) diperoleh

$$\|x_1, \dots, x_n\|_p = \left[\frac{1}{n!}\sum_{j_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{j_n=0}^{\infty}(0)^p\right]^{\frac{1}{p}} = 0\,.$$

Sehingga $\|x_1, \dots, x_n\|_p = 0$

Ruang $\ell^p$ memenuhi sifat kedua dan ketiga ruang norm-$n$, dapat dibuktikan dengan menggunakan sifat determinan. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa

$$\|x_1, \dots, x_{n-1}, y + z\|_p \leq \|x_1, \dots, x_{n-1}, y\|_p + \|x_1, \dots, x_{n-1}, z\|_p$$

$$\|x_1, \dots, x_{n-1}, y + z\|_p = \left[\frac{1}{n!}\sum_{j_1}\cdots\sum_{j_n}\left\|\begin{vmatrix} x_{1j1} & x_{2j1} & \cdots & x_{(n-1)j1} & y_{j1} + z_{j1} \\ x_{1j2} & x_{2j2} & \cdots & x_{(n-1)j2} & y_{j2} + z_{j2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{1jn} & x_{2jn} & \cdots & x_{(n-1)jn} & y_{jn} + z_{jn} \end{vmatrix}\right\|^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad (7)$$

Berdasarkan ketaksamaan Minkowski, diperoleh

$$\left[\frac{1}{n!}\sum_{j_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{j_n=1}^{\infty}\left(\begin{vmatrix} x_{1j1} & \cdots & x_{(n-1)j1} & y_{j1} \\ x_{1j2} & \cdots & x_{(n-1)j2} & y_{j2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{1jn} & \cdots & x_{(n-1)jn} & y_{jn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{1j1} & \cdots & x_{(n-1)j1} & z_{j1} \\ x_{1j2} & \cdots & x_{(n-1)j2} & z_{j2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{1jn} & \cdots & x_{(n-1)jn} & z_{jn} \end{vmatrix}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left[\frac{1}{n!}\sum_{j_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{j_n=1}^{\infty}\left(\begin{vmatrix} x_{1j1} & \cdots & x_{(n-1)j1} & y_{j1} \\ x_{1j2} & \cdots & x_{(n-1)j2} & y_{j2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{1jn} & \cdots & x_{(n-1)jn} & y_{jn} \end{vmatrix}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \left[\frac{1}{n!}\sum_{j_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{j_n=1}^{\infty}\left(\begin{vmatrix} x_{1j1} & \cdots & x_{(n-1)j1} & z_{j1} \\ x_{1j2} & \cdots & x_{(n-1)j2} & z_{j2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{1jn} & \cdots & x_{(n-1)jn} & z_{jn} \end{vmatrix}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad (8)$$

Jadi, $\|x_1, \dots, x_{n-1}, y + z\|_p \leq \|x_1, \dots, x_{n-1}, y\|_p + \|x_1, \dots, x_{n-1}, z\|_p$.
Karena semua sifat ruang norm-$n$ terpenuhi maka ruang $\ell^p$ terdefinisi pada ruang norm-$n$. ■

## 3.2 Ruang Banach-*n*

Definisi 3.2.1
*Barisan $(x_k)$ diruang norm-n $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ dalam norm-n jika untuk setiap $x_2, \dots, x_n \in X$, dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga*

$$\|x_k - x, x_2, \dots, x_n\| < \varepsilon, \qquad untuk\ setiap\ \ k \geq n_0$$

Teorema 3.2.2
*Misalkan $X = (X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$adalah ruang norm-n, maka limit dari suatu barisan diruang tersebut yang konvergen adalah tunggal.*

Definisi 3.2.3
*Barisan $(x_k)$ diruang norm-n $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ dikatakan Cauchy ke $x \in X$ dalam norm-n jika untuk setiap $x_2, \dots, x_n \in X$, dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga*

$$\|x_k - x_l, x_2, \dots, x_n\| < \varepsilon, \qquad untuk\ setiap\ \ k, l \geq n_0$$

Teorema 3.2.4
*Jika barisan $(x_k)$ konvergen dalam norm-n, maka $(x_k)$ adalah barisan Cauchy dalam norm-n.*

Definisi 3.2.5
*Misal X merupakan ruang vektor dalam ruang norm-n. Maka X disebut ruang yang lengkap pada norm-n jika setiap barisan Cauchy pada X konvergen ke elemen X. Ruang Banach-n merupakan ruang norm-n yang lengkap.*

Teorema 3.2.6
*Ruang $\ell^p$ adalah ruang yang lengkap pada norm-n, dengan norm-n pada $\ell^p$ didefenisikan sebagai berikut*

$$\|x_1,\dots,x_n\|_p=\left[\frac{1}{n!}\sum_{j_1=1}^{\infty}\dots\sum_{j_n=1}^{\infty}\left(\begin{vmatrix}x_{1j1} & x_{2j1} & \cdots & x_{nj1}\\ x_{1j2} & x_{2j2} & \cdots & x_{nj2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{1jn} & x_{2jn} & \cdots & x_{njn}\end{vmatrix}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

*Bukti :*

Akan ditunjukkan bahwa setiap barisan Cauchy dalam $\ell^p$ konvergen ke $x\in\ell^p$. Misal $(x_k)$ adalah sebarang barisan Cauchy dalam $\ell^p$, dimana $x_k=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots\right)$. Maka untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $n_0\in\mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k,l\ \geq n_0$ berlaku

$$\|x_k-x_l,x_2,\dots x_n\|=\left[\frac{1}{n!}\sum_{j_1=1}^{\infty}\dots\sum_{j_n=1}^{\infty}\left(\begin{vmatrix}x_{j1}^{(k)}-x_{j1}^{(l)} & x_{2j1} & \cdots & x_{nj1}\\ x_{j2}^{(k)}-x_{j2}^{(l)} & x_{2j2} & \cdots & x_{nj2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{jn}^{(k)}-x_{jn}^{(l)} & x_{2jn} & \cdots & x_{njn}\end{vmatrix}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}<\varepsilon. \qquad (9)$$

diperoleh,

$$\frac{1}{n!}\sum_{j_1=1}^{\infty}\dots\sum_{j_n=1}^{\infty}\left(\begin{vmatrix}x_{j1}^{(k)}-x_{j1}^{(l)} & x_{2j1} & \cdots & x_{nj1}\\ x_{j2}^{(k)}-x_{j2}^{(l)} & x_{2j2} & \cdots & x_{nj2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{jn}^{(k)}-x_{jn}^{(l)} & x_{2jn} & \cdots & x_{njn}\end{vmatrix}\right)^p<\varepsilon^p \qquad (10)$$

Ambil $j_i$ yang tetap, dimana $i=1,2,\dots,n$, dan misal$(n!)^{\frac{1}{p}}\varepsilon=\varepsilon'$, sehingga diperoleh

$$\begin{vmatrix}x_{j1}^{(k)}-x_{j1}^{(l)} & x_{2j1} & \cdots & x_{nj1}\\ x_{j2}^{(k)}-x_{j2}^{(l)} & x_{2j2} & \cdots & x_{nj2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{jn}^{(k)}-x_{jn}^{(l)} & x_{2jn} & \cdots & x_{njn}\end{vmatrix}<\varepsilon'. \qquad (11)$$

Berdasarkan definisi determinan $n\times n$, dimana $p=(n-1)$ dan $q=n$ untuk $n$ genap dan $p=n$ dan $q=(n-1)$ untuk $n$ ganjil. Maka persamaan (8) dapat dituliskan

$$\left(\left(x_{j1}^{(k)}-x_{j1}^{(l)}\right)C_{11}+\left(x_{j3}^{(k)}-x_{j3}^{(l)}\right)C_{31}+\cdots+\left(x_{jp}^{(k)}-x_{jp}^{(l)}\right)C_{p1}\right)-\left(\left(x_{j2}^{(k)}-x_{j2}^{(l)}\right)C_{21}+\left(x_{j4}^{(k)}-x_{j4}^{(l)}\right)C_{41}+\cdots+\left(x_{jq}^{(k)}-x_{jq}^{(l)}\right)C_{q1}\right)<\varepsilon' \qquad (12)$$

Pilih $j_i$ yang tetap, untuk $i=1,2,\dots,n$, dimana $j_i=1,2,\dots$ sehingga dari (12) dapat disimpulkan bahwa $\left(x_{j1}^{(k)}\right),\left(x_{j2}^{(k)}\right),\dots,\left(x_{jn}^{(k)}\right)$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Berdasarkan Teorema Cauchy-Konvergen pada bilangan real, maka $\mathbb{R}$ lengkap. Karena $\mathbb{R}$ lengkap, maka $\left(x_{j1}^{(k)}\right),\left(x_{j2}^{(k)}\right),\dots,\left(x_{jn}^{(k)}\right)$ konvergen, berarti untuk $k\to\infty$ berlaku $\left(x_{j1}^{(k)}\right)\to\left(x_{j1}\right)$, $\left(x_{j2}^{(k)}\right)\to\left(x_{j2}\right),\cdots,\left(x_{jn}^{(k)}\right)\to\left(x_{jn}\right)$.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $x_k\to x$ dan $x\in\ell^p$. Dari (10), untuk $m,n\geq n_0$ diperoleh

$$\frac{1}{n!}\sum_{j_1=1}^{u}\dots\sum_{j_n=1}^{u}\begin{vmatrix}x_{j1}^{(k)}-x_{j1}^{(l)} & x_{2j1} & \cdots & x_{nj1}\\ x_{j2}^{(k)}-x_{j2}^{(l)} & x_{2j2} & \cdots & x_{nj2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{jn}^{(k)}-x_{jn}^{(l)} & x_{2jn} & \cdots & x_{njn}\end{vmatrix}^p<\varepsilon^p. \qquad (u=1,2,\dots)$$

Untuk $l \to \infty$ dan $u \to \infty$, dimana $k \geq n_0$, diperoleh

$$\frac{1}{n!}\sum_{j_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{j_n=1}^{\infty}\begin{vmatrix} x_{j1}^{(k)}-x_{j1} & x_{2j1} & \cdots & x_{nj1} \\ x_{j2}^{(k)}-x_{j2} & x_{2j2} & \cdots & x_{nj2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{jn}^{(k)}-x_{jn} & x_{2jn} & \cdots & x_{njn} \end{vmatrix}^p < \varepsilon^p \qquad (13)$$

Dari definisi determinan $n \times n$ memberikan

$$\frac{1}{n!}\sum_{j_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{j_n=1}^{\infty}\left[\left(\left(x_{j1}^{(k)}-x_{j1}\right)c_{11}+\left(x_{j3}^{(k)}-x_{j3}\right)c_{31}+\cdots+\left(x_{jp}^{(k)}-x_{jp}\right)c_{p1}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\left(x_{j2}^{(k)}-x_{j2}\right)c_{21}+\left(x_{j4}^{(k)}-x_{j4}\right)c_{41}+\cdots+\left(x_{jq}^{(k)}-x_{jq}\right)c_{q1}\right)\right]^p$$
$$< \varepsilon^p. \qquad (14)$$

Persamaan (14) menunjukkan bahwa $x_k - x = \left(x_{j1}^{(k)} - x_{j1}\right) \in \ell^p$.

Karena $x = x_k + (x - x_k)$, dimana $x_k \in \ell^p$, $(x - x_k) \in \ell^p$, maka berdasarkan ketaksamaan Minkowski diperoleh

$$\sum_{j1=1}^{\infty}\left|x_{j1}^{(k)}+\left(x_{j1}-x_{j1}^{(k)}\right)\right|^p \leq \sum_{j1=1}^{\infty}\left|x_{j1}^{(k)}\right|^p+\sum_{j1=1}^{\infty}\left|\left(x_{j1}-x_{j1}^{(k)}\right)\right|^p < \infty \qquad (15)$$

Jadi, $x \in \ell^p$. Dari (14) menunjukkan bahwa $x_k \to x$, karena $(x_k)$ adalah sebarang barisan cauchy dalam ruang $\ell^p$ dan $x \in \ell^p$, ini menunjukkan bahwa ruang $\ell^p$ adalah ruang yang lengkap pada norm-$n$ dengan kata lain $\ell^p$ merupakan ruang Banach-$n$. ■

# 4. Penutup

## 4.1 Kesimpulan

Ruang $\ell^p$ merupakan barisan $(x_n)$dari bilangan real sedemikian sehingga $\sum_{n=1}^{\infty}|x_1|^p$ konvergen. Dari rumusan norm-$n$ pada $\ell^2$ , didefinisikan norm-$n$ pada $\ell^p$, yaitu

$$\|x_1,\ldots,x_n\|_p = \left(\frac{1}{n!}\sum_{j_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{j_1=1}^{\infty}\begin{vmatrix} x_{1j1} & x_{2j1} & \cdots & x_{nj1} \\ x_{1j2} & x_{2j2} & \cdots & x_{nj2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1jn} & x_{2j2} & \cdots & x_{njn} \end{vmatrix}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ruang $\ell^p$ merupakan ruang yang lengkap pada ruang norm-$n$ atau ruang Banach-$n$ yang telah dibuktikan pada Teorema 3.2.6.

## 4.2 Saran

Dalam penulisan ini, hanya mengkaji kelengkapan ruang $\ell^p$ pada norm-$n$. Penulis menyarankan untuk mengkaji kelengkapan ruang $C[a,b]$, $L^2[a,b]$, baik pada norm-2 maupun norm-$n$.

# Daftar Pustaka

[1] Astriana, Ria, (2012), “Ruang $l^p$ Sebagai Ruang Banach-2 pada Ruang Norm-2”, *Skripsi* Universitas Hasanuddin Makassar.

[2] Ekariani, Shelvi dan Hendra Gunawan, (2012), “Teorema Titik Tetap pada Ruang Norm-n Standar”, *JMP*. 4, 69 – 77.

[3] Edwards, C.H dan David E. Penney, (1937), *Elementary Linear Algebra*, Prentice Hall, Inc : Englewood Cliffs, New Jersey.

[4] Gunawan, Hendra, (2001), “The Space of p-Summable Sequences and Its Natural n-Norm”, *Bull.Austral. Math. Soc*. 64, 137-147.

[5] Gunawan, H dan Mashadi, (2001), On n-norm Space. *Int. J. Math. Sci.* 27, 631-639.

[6] Kreszyg, Erwin, (1978), *Introductory Function Analysis with Application*, John Wiley & Sons, Inc : New York.

[7] Nur, M, (2011), *Teorema Titik Tetap di Ruang Norm-n Standar*, Tesis Magister Matematika ITB.

[8] Zulfaneti, (2011), Norm-n dan Fungsional linear-n terbatas d Ruang Hilbert, (Online), (pasca.unand.ac.id/id/wp-content/uploads/2011/09/artikel2.pdf diunduh 5 Maret 2013).