ISBN:1858-1382

J M S K

Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 10, No. 2, 75-82, Januari 2014

Metode Pengembangan Pendekatan Rata-rata Sampel untuk Menyelesaikan Masalah Program Stokastik Cacah Campuran

Faridawaty Marpaung[1]

Abstrak

Penelitian ini mengemukakan atau menjelaskan suatu strategi penyelesaian untuk menyelesaikan masalah program integer stokastik dua tahap. Metodologi ini menggunakan rata–rata program stokastik melalui sampel, dan pemecahan rata–rata masalah melalui sebuah algoritma optimal. Tujuan dari skema ini akan menghasilkan sebuah penyelesaian optimal untuk masalah yang sebenarnya dengan pendekatan sebuah eksponensial yang cepat sebagai ukuran sampel yang fix, dijelaskan teknik statistik dan deterministik bounding untuk validasi kualitas dari sebuah calon penyelesaian optimal.

Kata Kunci: Program Stokastik, optimal.

1. Pendahuluan

Dalam model operasional dan perencanaan diperlukan syarat bilangan cacah pada peubah keputusan. Untuk hal keputusan peningkatan sumber penghasilan, memiliki faktor seperti harga tetap, perubahan biaya, dan lain-lain menunjukkan model program cacah campuran. Berbagai aplikasi seperti yang muncul dalam skedul, rotasi, lokasi, perencanaan produksi, dan pembelanjaan, menunjukkan model bilangan cacah.

Program stokastik adalah merupakan program matematika, dimana beberapa data yang termuat pada tujuan atau kendala mengandung ketidakpastian yang dicirikan oleh distribusi peluang pada parameter. Dalam persoalan program stokastik adalah membuat sebuah keputusan sekarang dan meminimumkan biaya rata-rata harapan sebagai konsekuensi dari keputusan, paradigma ini dikenal sebagai model *recourse*.

Program stokastik cacah campuran adalah cabang program stokastik yang berkaitan dengan program stokastik dimana peubah keputusan meliputi syarat umum. Dalam program stokastik cacah campuran bertujuan mencari non–antisipasi keputusan (disini dan sekarang) yang diprioritaskan untuk mengetahui realisasi peubah acak. Keputusan ini dibutuhkan untuk menjadikan cara menjumlahkan total biaya atau hasil akhir optimal, dan lagi pula berbagai keputusan (termasuk melakukan *recourse*) dibatasi untuk bilangan cacah. Berbagai macam masalah[2] Program stokastik cacah campuran yang timbul tergantung pada keputusan bilangan cacah yang dibuat, jarang untuk hasil observasi peubah acak. Peubah keputusan problem program stokastik dua-tahap dipartisi menjadi dua himpunan. Peubah tahap pertama ditentukan sebelum melakukan realisasi parameter tak pasti. Kemudian, satu kejadian acak yang muncul sendiri, dan selanjutnya desain atau perbaikan pengawasan operasi dapat berbentuk pilihan pada biaya pasti, nilai tahap kedua atau peubah *recourse*. Tujuan deterministik keputusan tahap pertama sedemikian hingga jumlah biaya tahap pertama dan ekspektasi biaya *recourse* minimum. Formulasi standar dari program stokastik dua tahap sebagai berikut:

[1] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Medan, email: farida2008.unim@gmail.com*

[1,2,3] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10 Makassar*

$$\min_{x \in X}\{g(x) := c^T x + E[Q(x, \xi(\omega))]\} \quad (1)$$
$$\text{Kendala } Ax = b$$
$$x \in R_+^{M_0}$$

dengan x adalah keputusan antisipatif tahap pertama yang diambil sebelum peubah acak teramati dan

$$Q(x, \omega) := \inf_{y \in Y}\{q^T y : W_y \geq h - T_x\} \quad (2)$$

merupakan nilai optimal dan $\xi := (q, T, W, h)$ menyatakan vektor dari parameter problem tahap kedua. Diandaikan bahwa beberapa (atau semua) komponen ξ acak, ditulis $\xi(\omega)$, dan ekspektasi dalam (1) diambil berdasarkan sebaran peluang dari $\xi(\omega)$ yang diandaikan diketahui. Persoalan (1) dengan peubah $x \in R^{n_1}$, membentuk tahap pertama yang perlu diputuskan sebelum realisasi $\xi(\omega)$. Persoalan (2) dengan peubah $y \in R^{n_2}$, membentuk *recourse* untuk keputusan tahap pertama yang diketahui dan realisasi ξ dari data acak. Penelitian ini berkaitan dengan program stokastik dua tahap dengan *recourse* fix, yaitu matriks W adalah tertentu (bukan acak) dan peubah *recourse* dipersyaratkan cacah, yaitu $Y \subseteq Z^{n_2}$ dalam (2).

Diperlihatkan dalam [7] dua sumber kesulitan dalam menyelesaikan program stokastik dengan *recourse* cacah adalah:

1. Evaluasi eksak dari ekspektasi biaya *recourse*.
2. Mengoptimalkan Ekspektasi biaya *recourse*

Dalam pendekatan yang diajukan, fungsi ekspektasi biaya *recourse* dalam (1) diganti oleh pendekatan rata-rata sampel dan problem optimisasi terkait diselesaikan dengan memakai algoritma khusus untuk optimisasi tak konveks. Disini dianalisis laju konvergensi dari Pendekatan Rata–rata Sampel (PRS) untuk program stokastik dengan *recourse* cacah.

Untuk menentukan $E[Q(x, \xi(\omega))]$ pada persamaan (1) secara eksak sulit dilakukan sehingga dilakukan pendekatan yang baik bagi $E[Q(x, \xi(\omega))]$. Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan metode pendekatan rata-rata sampel untuk menentukan fungsi biaya *recourse* dalam masalah program stokastik cacah campuran.

2. Tinjauan Pustaka

2.1. Program Stokastik Dua Tahap

Penyelesaian persoalan program stokastik dua tahap berisi vektor deterministik. Pada tahap pertama, penyelesaian persoalan rencana awal deterministik akan dibuat. Pembentukan rencana awal deterministik dilakukan sebelum kondisi acak dari persoalan ditentukan. Sebuah vektor acak pada penyelesaian persoalan yang sesuai digunakan untuk merencanakan kompensasi divergensi, spesifikasi parameter dari persoalan akan muncul pada tahap kedua. Tujuan dari manager pada persoalan di atas adalah meminimum nilai rata–rata yang mana tidak hanya termasuk pengeluaran pada tahap perencanaan pendahuluan tetapi juga pada tahap kedua yang diperlukan untuk mengkompensasi pada divergensi di dalam sistem kendala persoalan. Jika persoalan program stokastik dengan model dua tahap dapat diselesaikan maka pemilihan dari rencana awal deterministik akan menjamin keberadaan (ekstensi) vektor acak di dalam kompensasi untuk sistem yang divergen.

Andaikan terdapat persoalan berikut:

$$min(C, X) \quad (3)$$
$$A^0X = B^0 \quad (4)$$
$$AX = B \quad (5)$$
$$X \geq 0 \quad (6)$$

dimana:

$$C = \{c_j\}, j = 1,2, \dots, m$$
$$B = (b_i), i = 1,2, \dots, m$$
$$B^0 = (b_k^0), k = 1,2, \dots, m$$
$$A^0 = \|a_{kj}^0\|, k = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n$$
$$A = \|a_{ij}\|, i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n$$

Andaikan elemen dari matriks $A = A(\omega)$, vector $B = B(\omega)$ dan $C = C(\omega)$ benilai acak.

2.2. Metode Pendekatan Rata-rata Sampel

Suatu sampel $\xi^1, \dots, \xi^N$ dari N realisasi vektor acak dibentuk, dan akibatnya ekspektasi fungsi nilai $E[Q(x, \xi(\omega))]$ diestimasi oleh fungsi rata–rata sampel $N^{-1}\sum_{n=1}^{N} Q(x, \xi^n)$. Aproksimasi rata–rata sampel yang diperoleh:

$$\min_{x \in X} \left\{ \hat{g}_N(x) := c^T x + N^{-1} \sum_{n=1}^{N} Q(x, \xi^n) \right\} \quad (7)$$

$\hat{v}_N$ dan $\hat{x}_N$ masing–masing menyatakan nilai optimal dan penyelesaian optimal problem PRS (1); dan v^* serta x^* masing–masing menyatakan nilai optimal dan penyelesaian optimal problem awal (1). Hal penting yang perlu diperhatikan adalah:

i. Apakah $\hat{v}_N$ dan $\hat{x}_N$ konvergen terhadap mitranya v^* dan x^* apabila ukuran sampel N dinaikkan?
ii. Jika (i) terjawab, maka lakukan analisis konvergensi dan estimasi ukuran sampel yang diperlukan untuk memperoleh nilai optimal sebenarnya.
iii. Pendekatan optimisasi yang efisien untuk menyelesaikan problem PRS dengan ukuran sampel yang diinginkan.
iv. Perhatikan bahwa untuk N yang diketahui penyelesaian $\hat{x}_N$ adalah layak dan merupakan calon untuk penyelesaian optimal terhadap problem awal. Apakah dapat diberikan informasi tentang kualitas dari calon penyelesaian ini?

Pertanyaan–pertanyaan di atas telah terjawab untuk program linier stokastik dua tahap, yaitu apabila peubah tahap pertama dan kedua dalam (1) dan (2) kontinu. Telah dibuktikan bahwa untuk program linier stokastik dengan sebaran diskrit, suatu penyelesaian optimal dari PRS memberikan penyelesaian optimal eksak dari problem awal dengan peluang mendekati satu secara eksponensial apabila N bertambah (lihat [10]). Uji statistik untuk memvalidasi calon penyelesaian yang didasarkan pada gap optimalitas menurut Norkin *et al.* (lihat [5] dan [6]), dan demikian pula syarat optimalitas telah diajukan (lihat [8]). Lebih lanjut lagi, teknik sampling ini telah diintegrasikan dengan algoritma dekomposisi untuk menyelesaikan program linier stokastik dari berbagai ukuran dengan hasil yang cukup akurat (lihat Linderoth *et al.* [4]). Konvergensi dari pendekatan PRS telah juga diperluas untuk program stokastik dengan himpunan keputusan tahap pertama diskrit dan berhingga oleh Kleywegt *et al.* [3].

3. Penyelesaikan Problem PRS

Pada bagian ini dibicarakan sifat konvergensi dari estimastor PRS, terutama yang diterapkan pada program dua tahap dengan *recourse* integer . Untuk memakai hasil klasik, seperti Hukum Bilangan Besar, perlu diandaikan bahwa sampel yang dibentuk menyebar saling bebas dan identik. Namun perlu diperhatikan bahwa sifat konvergensi dapat diturunkan terhadap kondisi lebih luas. Disini diajukan algoritma *Branch* and *Bound* untuk program stokastik integer dua tahap dengan sebaran diskrit peubah integer campuran di tahap pertama dan peubah integer murni di tahap kedua. Konsep dari algoritma ini adalah mengidentifikasi calon penyelesaian dengan berturut-turut mempartisipasi ruang pencarian.

Secara prinsip teknik enumerasi Schultz *et al.* [8] dapat dipakai untuk menyelesaikan problem PRS. Namun umumnya sangat sulit untuk mengkarakterisasi himpunan V_N kecuali problem tahap kedua memiliki struktur sangat sederhana, tambahan lagi kardinalitas V_∞ sangat besar, sehingga enumerasi tidak dimungkinkan secara komputasi. Alternatifnya, dapat dicoba untuk menyelesaikan deterministik ekivalen dengan memakai algoritma Branch and Bound. Namun, teknik demikian tidak mencoba untuk mengeksplotasi struktur yang dapat teruraikan dari problem, dan metode ini akan gagal kecuali ukuran sampel kecil. Dekomposisi berbaris algoritma *Branch* and *Bound* yang dihentangkan dalam Ahmed *et al.* ([1] dan [2]) untuk menyelesaikan problem PRS. Di samping mengkarakterisasi himpunan calon penyelesaian V_n, algoritma ini mengidentifikasi calon penyelesaian dengan berturut–turut mempartisi ruang pencarian. Lebih lanjut lagi, algoritma memanfaatkan informasi batas bawah untuk mengeliminasi bagian daerah pencarian sehingga mencegah enumerasi lengkap. Karena algoritma tidak secara eksplisit menelusuri V_n, harus dipastikan bahwa penyelesaian akhir yang diperoleh tidak termasuk dalam himpunan ini untuk mencapai konvergensi.

Berikut ini diuraikan algoritma sebagai penambahan terhadap asumsi $(A_1)-(A_5)$. Algoritma mengandaikan (A_6) Matriks teknologi T, yang mengaitkan problem tahap pertama dan kedua adalah deterministik, yaitu $T_k = T$ untuk semua k.

Perhatikan transformasi linier dari peubah problem tahap pertama x dengan memakai T oleh $x := T_x$. Peubah x dikenal sebagai peubah "lunak" dalam literatur program stokastik. Ide prinsip dibelakang algoritma adalah memandang problem PRS dalam peubah lunak.

$$\min_{\chi\in\chi}\left\{\hat{G}_N(\chi) := \Phi(\chi) + \hat{\Psi}_N(\chi)\right\} \qquad (8)$$

dimana

$$\Phi(\chi) := \inf_{x\in X}\left\{c^T x : Tx = \chi\right\}, \hat{\Psi}_N(\chi) := N^{-1}\sum_{n=1}^{N}\Psi_N(\chi,\xi^j n)$$

$$\Psi(\chi,\xi) := \inf_{y\in Y}\left\{q^T y : Wy \geq h - \chi\right\}$$

dan

$$X := \{X \in \Re^{m_2} : X = T_x, x \in X\}$$

X memiliki dimensi lebih kecil dari pada x. Lebih penting lagi, transformasi ini memberikan struktur tertentu terhadap fungsi diskontinu $\Psi_N(\cdot)$. Khususnya, dapat diperlihatkan dalam Ahmed *et al.* ([1] dan [2]) bahwa $\Psi_N : \Re^{m_2} \to \Re$ mempunyai sifat berikut :

i. Fungsi tak naik sepanjang setiap komponen X_j , $j = 1,\ldots,m_2$ dari X
ii. Untuk setiap $z \in Z^{m_2}$, konstan pada himpunan $C_N(z) := \{X : h^n - z - 1 \le X \le h^n - z, n = 1,\ldots,N\}$

Perhatikan bahwa himpunan $C_N(z)$ dikaitkan dengan himpunan $C_N(z)$ oleh transformasikan $X = T_x$. Juga perhatikan baku $C_N(z)$ adalah empat persegi karena merupakan perkalian kartesian dari interval. Jadi, fungsi nilai ekspektasi tahap kedua $\Psi_N(\cdot)$ konstan perbagian pada daerah empat persegi dalam ruang peubah lunak X . Maka diskontinuitas dari $\Psi_N(\cdot)$ hanya dapat terletak di batas daerah–daerah ini dan semua ortogonal pada sumbu peubah. Lebih lanjut lagi, karena X kompak, maka X juga kompak. Jadi daerah demikian dalam himpunan layak problem berhingga.

Algoritma mengeksploitasi sifat struktural di atas dengan mempartisi ruang χ menjadi daerah berbentuk $\prod_{j=1}^{m_2}[l_j, u_j)$, dimana u_j merupakan komponen ke j dari suatu titik χ dimana fungsi nilai tahap kedua $\hat{\varphi}_N(.)$ diskontinu. Perhatikan bahwa $\hat{\varphi}_N(.)$ hanya dapat diskontinu di suatu titik χ dimana sekurang–kurangnya satu dari komponen vektor $h^n - \chi$ merupakan integral untuk beberapa $n = 1, \ldots, N$. Jadi, partisi ruang pencarian sepanjang nilai χ.

Berikut ini diberikan pernyataan formal dari algoritma *Branch* and *Bound*.

Notasi:

$\mathcal{L}$	Daftar sub problem
i	Nomor iterasi; juga dipakai untuk mengindikatorkan sub problem terpilih
$\mathcal{P}$	Partisi yang berkaitan dengan *i*
α^i	Batas atas yang diperoleh di iterasi *i*
β^i	Batas bawah pada sub problem *i*
χ^i	Penyelesaian layak untuk nilai sub problem
U	Batas atas pada nilai optimal global
L	Batas bawah pada nilai optimal global
χ^*	Calon optimum global

Algoritma Inisialisasi

Proses problem dengan membentuk hiper-persegi berbentuk

$P^0 := \prod_{j=1}^{m_1}[l_j^0, u_j^0)$ sehingga $\chi \subset P^0$.

Tambahkan problem

$Min\hat{G}_N(\chi)$ dengan kendala $\chi \in \chi \cap P^0$ untuk mendaftarkan sub problem terbuka $\mathcal{L}$.

Buat $U \leftarrow +\infty$ dan penghitung iterasi $i \leftarrow 0$

Proses Iterasi.

Langkah 1: Jika $\mathcal{L} = \emptyset$, berhenti dengan penyelesaian χ^*, jika tidak, pilih sub problem i, yang didefinisikan sehingga $Min\hat{G}_N(\chi)$ dengan kendala $\chi \in \chi \cap P^i$ dari sub problem saat ini. Buat $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L}\backslash\{i\}$.

Langkah 2: Problem batas bawah β^i yang memenuhi $\beta^i \leq inf\{\hat{G}_N(\chi): \chi \in \chi \cap P^i\}$ Jika $\chi \cap P^i = \emptyset, \beta^i = +\infty$.
Tentukan penyelesaian layak $\chi^i \in \chi$ dan hitung batas atas $\alpha^i \geq \hat{G}_N(\chi^i)$

Langkah 2.a: Buat $L \leftarrow min_{l \in \mathcal{L} \cup \{i\}} \beta^l$
Langkah 2.b: Jika $\alpha^i < U$, maka $\chi^* \leftarrow \chi^i$ dan $U \leftarrow \alpha^i$
Langkah 2.c: Hentikan daftar sub problem, yaitu $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L}\backslash\{l: \beta^l \geq U\}$

Jika $\beta^i \geq U$ kembali ke Langkah 1 dan pilih sub problem lain.

Langkah 3: Partisi P^i menjadi $\mathcal{P}^{i_1}$ dan $\mathcal{P}^{i_2}$. Buat $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} \cup \{i_1, i_2\}$ yaitu persoalan kedua sub problem dari $\hat{G}_N(\chi)$ kendala $\chi \in \chi \cap \mathcal{P}^{i_1}$, dan dari $\hat{G}_N(\chi)$ kendala $\chi \in \chi \cap \mathcal{P}^{i_2}$ ke daftar sub problem terbuka. Untuk tujuan pemilihan $\beta^{i_1}, \beta^{i_2} \leftarrow \beta^i$. Buat $i \leftarrow i + 1$ dan kembali ke Langkah 1.

4. Kesimpulan

Dalam penelitian ini dikembangkan metode pendekatan rata-rata sampel untuk program stokastik dua tahap. Penyelesaian persoalan program stokastik dua tahap berisi vektor deterministik. Pada tahap pertama, dibuat penyelesaian persoalan rencana awal deterministik. Pembentukan rencana awal deterministik dilakukan sebelum kondisi acak dari persoalan ditentukan. Pada tahap kedua digunakan sebuah vektor acak pada persoalan yang sesuai untuk merencanakan kompensasi divergensi, spesifikasi parameter.

Dua kesulitan dalam menyelesaikan program stokastik adalah:

1. Evaluasi eksak dari ekspektasi biaya *recourse.*
2. Mengoptimalkan Ekspektasi biaya *recourse*.

Algoritma *Branch* and *Bound* untuk menyelesaikan problem PRS. Algoritma *Branch* and *Bound* juga mengkaraterisasi himpunan calon penyelesaian dan mengidentifikasi calon penyelesaian dengan berturut–turut mempartisi ruang pencarian. Algoritma memanfaatkan informasi batas bawah untuk mengeliminasi bagian daerah pencarian. Karena algoritma tidak secara eksplisit menelusuri himpunan calon penyelesaian, maka dapat dipastikan bahwa penyelesaian akhir yang diperoleh tidak termasuk dalam himpunan ini untuk mencapai konvergensi.

Daftar Pustaka

[1] Ahmed S., 2000. “Strategic planning under uncertainty: Stochastic integer programming approaches” *Ph.D. Thesis*. University of Illinois at Urbana-Champaign.

[2] Ahmed S., Tawarmalani M., and Sahinidis N.V., 2000. “A finite branch and bound algorithm for two stage stochastic integer programs”. *Submitted for Publication*. E-print available in: *the Stochastic Programming E-Print Series*: http://dochost.rz.hu-berlin.de/speps/..

[3] Kleywegt A.J., Shapiro A., and Homem De-Mello T., 2001. “The sample average approximation method for stochastic discrete optimization” *SIAM Journal of Optimization*, 12: 479–502.

[4] Linderoth J., Shapiro S., and Wright S., 2002. “The empirical behavior of sampling methods for stochastic programming”. *Optimization Technical Report 02-01*, Computer Sciences Department, University of Wisconsin-Madison.

[5] Norkin V.I., Pflug Ch., and Ruszczynski A., 1998. “A branch and bound method for stochastic global optimization”. *Mathematical Programming*, 83: 425–450.

[6] Norkin V.I., Ermoliev Y.M., and Ruszczynski A., 1998. “On optimal allocation of indivisibles under uncertainty” *Operations Research*, 46: 381–395.

[7] Schultz R., 1995. “On structure and stability in stochastic programs with random technology matrixand complete integer recourse”. *Mathematical Programming*, 70(1): 73–89.

[8] Schultz R., Stougie L., and Van der Vlerk M.H., 1998. “Solving stochastic programs with integer recourse by enumeration: A framework using Grobner basis reductions”. *Mathematical Programming*, 83: 229–252.

[9] Shapiro A. and Homem De-Mello T., 1998. “A simulation-based approach to two stage stochastic programming with recourse”. *Mathematical Programming*, 81(3, Ser. A): 301–325.

[10] Shapiro A. and Homem De-Mello T., 2001. “On rate of convergence of Monte Carlo approximations of stochastic programs”. *SIAM Journal on Optimization*, 11: 70–86.