JMSK
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 4, No.2, 104-116, Januari 2008
ISBN:1858-1382

Penentuan Harga Opsi Eropa Menggunakan Persamaan Black-Scholes

Khaeruddin[1] dan Jusmawati Massalesse[*]

Abstrak

Rumus opsi saham Black-Scholes merupakan terobosan dalam penentuan nilai suatu wahana keuangan derivatif opsi saham. Namun demikian, rumus ini didasari beberapa asumsi yang dalam praktiknya tidak realistis. Pengembangan asumsi tersebut diperlukan agar model penilaian harga opsi saham lebih realistis. Tulisan ini membahas solusi persamaan diferensial parsial Black-Scholes terhadap opsi Eropa pada saham yang berfokus pada solusi analitis. Relaksasi asumsi yang dibahas merupakan asumsi tanpa dividen, suku bunga konstan, volatilitas tetap, dan waktu yang kontinu.

Kata Kunci : *European call, model harga saham, opsi, persamaan diferensial parsial Black-Scholes.*

1. Pendahuluan

Keuangan merupakan suatu bidang yang memiliki area perkembangan dan perubahan tercepat dalam dunia perusahaan. Karena perubahan cepat inilah, instrumen-instrumen keuangan modern menjadi sangat kompleks dan salah satunya adalah opsi. Opsi adalah instrumen derivatif aset keuangan yang masih relatif baru meskipun aktivitas perdagangannya telah meluas secara cepat sejak adanya pengenalan kontrak tercatat di bursa, seperti di *Chicago Board Options Exchange* atau CBOE ([6]).

Pada tahun 1973, CBOE menjadi bursa terorganisasi pertama di dunia yang memperdagangkan Kontrak Opsi. Opsi yang diperdagangkan saat itu hanyalah opsi pada saham (*stock option*). Sejak itu, pasar opsi terus mengalami pertumbuhan pesat. Saat ini, opsi yang diperdagangkan tidak hanya terbatas pada opsi saham tetapi juga opsi indeks saham (*stock indeks option*), opsi komoditas (*commodity options*), dan lain-lain. Selain menambah volatilitas bursa saham, perdagangan opsi juga sangat berguna bagi perusahaan maupun individu untuk mengurangi resiko keuangan. Selanjutnya dengan adanya opsi, perusahaan/individu juga bisa mengurangi volatilitas pasar sehingga banyak proyek yang tadinya tidak layak menjadi layak (Sinar Harapan, 2004). Model-model matematika baru banyak dikembangkan dan digunakan di dalam masalah-masalah yang berhubungan dengan instrumen keuangan ini, dan dunia perusahaan dan keuangan yang dahulu dijalankan oleh kalangan bisnis, sekarang diawasi oleh orang-orang matematika dan ahli-ahli komputer (Coelen, 2002).

Black dan Scholes (1973) menciptakan karya yang berjudul *The Pricing of Options and Corporate*, yang dianggap sebagai terobosan dalam penaksiran opsi khususnya, dan derivatif lain umumnya. Karangan itu bersama dengan karangan Merton (1973) difokuskan pada prinsip dasar model untuk menentukan harga opsi, yang menjadikan pengarang Myron S. Scholes dan Robert C. Merton menerima hadiah Nobel dalam ilmu Ekonomi tahun 1997, dan Fisher Black menerima penghargaan (Coelen, 2002). Model opsi Eropa yang diusulkan dalam karangan itu dikenal sebagai formula Black-Scholes, yang selanjutnya akan disingkat dengan BS

[1] *Staf pengajar pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar*
Email: khaeruddin@gmail.com, jusmawati@gmail.com

(Andriansyah, 2004). Formula Black-Scholes menunjukkan pentingnya ilmu matematika dalam bidang keuangan. Selain itu, formula ini juga membantu perkembangan dan kesuksesan bidang baru dalam matematika keuangan dan ilmu teknik (Coelen, 2002).

Formula BS merupakan solusi analitik dari Persamaan Diferensial Parsial (PDP) BS :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV$$

dimana V adalah harga dari suatu derivatif pada aset dasar S. PDP ini dapat diselesaikan dengan banyak metode, namun secara umum diselesaikan melalui 3 metode yaitu (1) Pendekatan analitik, (2) Prosedur numerik, dan (3) Solusi analitik. Pendekatan analitik biasanya digunakan dalam menaksir opsi Amerika karena syarat-syarat batasnya lebih kompleks daripada opsi Eropa, sehingga dengan opsi Amerika akan sulit untuk menemukan formula analitik secara eksak. Yang paling terkenal yaitu prosedur numerik dan contoh penting dari prosedur ini yaitu metode binomial (Cox *et al*., 1979), yang memerlukan asumsi-asumsi yang tidak spesifik. Sementara solusi analitik akan menghasilkan formula eksak yang sesuai dengan formula BS (Andriansyah, 2004). Perluasan model opsi Amerika juga mempunyai daya tarik kuat. Meskipun demikian, penaksiran tipe Amerika itu dianggap lebih sulit daripada tipe Eropa. Pemilik opsi gaya Eropa bisa menggunakan haknya satu kali hanya pada saat opsi jatuh tempo (*expiration date*). Sementara opsi gaya Amerika bisa menggunakan haknya kapan saja di dalam masa berlakunya kontrak opsi. Hal ini yang menyebabkan opsi Amerika sulit untuk menemukan syarat-syarat batas dan nilai optimal.

2. Landasan Teori

Integral Ito

Pada bagian ini akan diperkenalkan integral stokastik mengenai gerakan Brownian. Integral stokastik ini secara umum disebut integral Ito. Untuk memperoleh formula Black-Scholes, maka perlu untuk mengetahui definisi integral stokastik yaitu

$$\int_0^T X(t)dB(t).$$

Coelen (2002) menyatakan bahwa integral Ito dari proses sederhana merupakan variabel acak dengan empat sifat berikut :

1. Bersifat linear, artinya jika $X(t)$ dan $Y(t)$ adalah proses sederhana, dan α dan β adalah konstan maka

$$\int_0^T (\alpha X(t) + \beta Y(t))d(B(t)) = \alpha\int_0^T X(t)d(B(t) + \beta\int_0^T Y(t)d(B(t)).$$

2. Integral dari fungsi indikator pada interval $I_{[a,b]}(t) = 1$, ketika $t \in [a,b]$ dan 0 lainnya adalah $B(b) - B(a)$, $0 < a < b < T$,

$$\int_0^T I_{[a,b]}(t)d(B(t)) = B(b) - B(a).$$

3. Meannya nol : $E\int_0^T X(t)dB(t) = 0.$
4. Bersifat Isometri :

$$E\left(\int_0^T X(t)d(B(t))\right)^2 = \int_0^T E(X^2(t))dt.$$

Berdasarkan sifatnya, gerakan Brownian mempunyai variasi kuadrat pada $[0,t]$, yang sama dengan $t, \forall t$. Ini juga dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\int_0^t (dB(s))^2 = \int_0^t ds = t$$

atau dalam notasi differensial $(dB(t))^2 = dt.$

Dengan menggunakan sifat ini, dan mengaplikasikan formula Taylor, formula Ito menyatakan bahwa jika $f(x)$ adalah fungsi yang terdiferensial 2 kali, maka $\forall t$ berlaku

$$f(B(t)) = f(0) + \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))ds.$$

dan dalam notasi diferensial menjadi

$$d(f(B(t)) = f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2} f''(B(t))dt.$$

Selanjutnya didefinisikan proses Ito. Misalkan $Y(t)$ adalah proses integral

$$Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s).$$

Proses Ito adalah integral Ito plus yang diadaptasi dari proses kontinu variasi berhingga. Proses Y disebut Ito jika untuk setiap $0 \le t \le T$, Y dapat dinyatakan sebagai

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s)\,. \qquad (1)$$

Secara umum, jika Y adalah **proses Ito** maka Y mempunyai diferensial stokastik pada $[0,T]$ sebagai berikut

$$dY(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t) \qquad (2)$$

untuk $0 \le t \le T$. Fungsi μ sering disebut koofisien *drift* dan fungsi σ disebut koofisien difusi.

Jika $f(x,t)$ terdiferensial dua kali secara kontinu di x , dan terdiferensial secara kontinu di t , dan $X(t)$ dinyatakan sebagai proses Ito, maka

$$df(x(t),t) = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t),t)dX(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(X(t),t)dt + \frac{1}{2}\sigma^2(X(t))^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t),t)dt$$

(3)

Persamaan (3) merupakan formula Ito's dan merupakan kasus yang akan digunakan untuk menghitung persamaan diferensial parsial Black-Scholes di bagian pembahasan (Coelen, 2002).

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Penurunan Persamaan Diferensial Parsial Black-Scholes

Dalam sub bab ini, akan ditentukan **harga dari suatu derivatif**, $V(S,t)$. Model untuk suatu saham diperoleh dari suatu proses Ito yang didefinisikan dalam persamaan (2). Maka dari itu, misalkan fungsi $V(S,t)$ terdiferensial dua kali di S dan terdiferensial di t. Dengan menggunakan persamaan (3), diperoleh

$$dV(S,t) = \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS\,dS\,.$$

Berdasarkan sifat variasi kuadrat,

$$dV(S,t) = \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt\,. \qquad (4)$$

Dengan mensubstitusikan model harga saham $dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dB$ ke persamaan (4), diperoleh:

$$dV(S,t) = \sigma S dB\frac{\partial V}{\partial S} + \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt\,. \qquad (5)$$

Sekarang pertimbangkan nilai dari suatu portofolio yang dibangun dengan *long* satu opsi, V dan *short* sejumlah $\frac{\partial V}{\partial S}$ saham. *Long* disini berarti membeli saham, sedangkan *short* berarti meminjam saham yang bebas resiko dari suatu perusahaan dan menjual kembali saham yang dipinjam tersebut dengan harga yang beredar di pasar. *Long* dan *short* merupakan bentuk *hedging*. Nilai dari portofolio ini yang disimbolkan dengan π yaitu

$$\pi = V - \frac{\partial V}{\partial S}S\,. \qquad (6)$$

Perubahan nilai dari portofolio yang disimbolkan dengan $d\pi$ dalam interval waktu yang tidak lama dt adalah

$$d\pi = dV - \frac{\partial V}{\partial S}dS\,. \qquad (7)$$

Substitusikan model harga saham dan (4) ke dalam persamaan (7) untuk dV dan dS, sehingga diperoleh

$$d\pi = \sigma SdB\frac{\partial V}{\partial S} + \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt - \frac{\partial V}{\partial S}(\mu Sdt + \sigma SdB)$$
$$= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt \,. \tag{8}$$

Perlu dicatat dalam hal ini bahwa portofolio sama sekali *risk less* (tidak beresiko), karena tidak memuat suku acak gerakan Brownian. Karena portofolio ini tidak memuat resiko, portofolio yang diperoleh harus sama dengan sekuriti bebas resiko lainnya. Jika diperoleh lebih dari ini maka *arbitrageurs* (orang-orang yang melakukan arbitrasi) dapat membuat suatu keuntungan dengan melakukan *shorting*. Keuntungan *shorting* yang diperoleh ini digunakan untuk membeli portofolio tersebut. Jika portofolio diperoleh ternyata kurang, maka *arbitrageurs* dapat membuat suatu *risk less* menjadi keuntungan dengan *shorting* portofolio, dan membeli sekuriti *risk-free* (bebas resiko). Berikut suatu portofolio *risk less*

$$d\pi = r\pi\, dt \tag{9}$$

dimana r adalah suku bunga bebas resiko. Substitusi $d\pi$ dan π dari persamaan (6) dan (8) sehingga menghasilkan **persamaan differensial parsial Black-Scholes**

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV \tag{10}$$

3.2 *European Call Option*

Syarat batas diperlukan dalam penyelesaian persamaan Black-Scholes. Dalam tulisan ini, syarat batas akan dihubungkan dengan harga dari *European Call Option* $C(S,t)$, dengan harga kesepakatan (*exercise price*) E, dan tanggal jatuh tempo (*expiration date*) T.

Kondisi akhir pada $t = T$ dapat diperoleh dari definisi *call option* (opsi beli). Jika pada tanggal jatuh tempo $S > E$, maka opsi beli akan bernilai $S - E$. Dalam keadaan seperti ini, pembeli opsi akan menggunakan haknya untuk membeli saham sebesar E kemudian kalau mau, pembeli opsi bisa segera menjualnya dengan harga S sehingga pembeli opsi untung sebesar $S - E$. Jika pada tanggal jatuh tempo $S < E$, maka pembeli opsi tidak perlu *exercise call option*-nya. Karena pembeli dapat membeli saham yang lebih murah dari E di pasar. Dalam kasus ini, pembeli opsi membiarkan kontrak *call option* berakhir tanpa digunakan sehingga pembeli opsi cuma rugi sebesar harga yang dibayarkan untuk beli kontrak itu (harga ini disebut **premi** dari opsi). Pada waktu $t = T$, nilai atau harga opsi yang dikenal dengan *pay off* (keuntungan) adalah

$$C(S,T) = \max(S - E, 0). \tag{11}$$

Ini kondisi akhir untuk PDP BS bentuk *European Call* sekaligus sebagai syarat awal.

Untuk menentukan syarat batas, akan dipertimbangkan terlebih dahulu nilai C ketika $S = 0$ dan $S \to \infty$. Jika $S = 0$, maka dari model harga saham diperoleh $dS = 0$. Ini berarti bahwa S tidak pernah berubah. Jika pada tanggal jatuh tempo $S = 0$, maka dari persamaan (11) *payoff* harus 0. Maka dari itu, ketika $S = 0$, diperoleh

$$C(0,T) = 0 \,.$$

Sekarang ketika $S \to \infty$, maka semakin mungkin opsi akan di-*exercise* dan *pay off* akan menjadi sebesar $S - E$. Harga kesepakatan menjadi sangat kurang di $S \to \infty$, sehingga harga opsi ekuivalen dengan

$$C(S,T) \approx S \text{ di } S \to \infty$$

3.3 Solusi Persamaan Black-Scholes untuk *European Call*

Untuk menyelesaikan persamaan Black-Scholes, perlu dilakukan transformasi persamaan ke dalam persamaan yang akan dikerjakan. Langkah pertama yaitu menghilangkan suku S dan S^2 dalam persamaan diferensial Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV \ . \tag{12}$$

Untuk melakukan ini, misalkan perubahan dari variabel-variabelnya menjadi

$$S = Ee^x \tag{13}$$

$$t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \tag{14}$$

$$V = Ev(x,\tau)\,. \tag{15}$$

Dengan menggunakan aturan rantai dari kalkulus untuk mentransformasi turunan parsial ke dalam fungsi dua variabel, maka

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial S} \tag{16}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}. \tag{17}$$

Berdasarkan persamaan (13), (14), dan (15), maka dapat ditunjukkan bahwa

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 \quad \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S} \qquad \frac{\partial \tau}{\partial S} = 0\,.$$

Selanjutnya substitusi persamaan di atas ke dalam persamaan (16) dan persamaan (17), dan dihasilkan

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{E}{S}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{18}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 E\frac{\partial v}{\partial \tau} \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = -\frac{E}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{E}{S^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{20}$$

Setelah itu, substitusi persamaan (18), (19), dan persamaan (20) ke dalam persamaan diferensial parsial Black-Scholes, diperoleh

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(k-1)\frac{\partial v}{\partial x}-kv \tag{21}$$

dimana

$$k=\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

Syarat awal $C(S,T)=\max(S-E,0)$ ditransformasi ke dalam

$$v(x,0)=\max\,(e^x-1,0)\,. \tag{22}$$

Misalkan terdapat variabel lain

$$v=e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$$

maka dengan turunan sederhana diperoleh

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\beta e^{\alpha x+\beta\tau}u+e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial \tau}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u+e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\alpha\left(\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u+e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x}+e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Selanjutnya substitusi parsial di atas ke dalam persamaan (21), diperoleh

$$\beta e^{\alpha x+\beta\tau}u+e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial \tau}=\alpha\left(\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u+e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x}+e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$+(k-1)\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u+(k-1)e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x}-ke^{\alpha x+\beta\tau}u$$
$$e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\beta u+\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)=e^{\alpha x+\beta\tau}\left[\alpha^2u+2\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(k-1)\left(\alpha u+\frac{\partial u}{\partial x}\right)-ku\right]$$
$$\left(\beta u+\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)=\alpha^2u+2\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(k-1)\left(\alpha u+\frac{\partial u}{\partial x}\right)-ku\,.$$

Dengan menghilangkan suku u dan suku $\frac{\partial u}{\partial x}$, dan dengan memilih nilai α dan β sedemikian sehingga diperoleh

$$\beta=\alpha^2+(k-1)\alpha-k$$

dan

$$2\alpha+k-1=0\,.$$

Susun kembali persamaan-persamaan di atas sehingga dapat ditulis

$$\alpha=-\tfrac{1}{2}(k-1)$$

dan $\quad \beta=-\tfrac{1}{4}(k+1)^2\,.$

Transformasi dari v untuk u yaitu

$$v = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}u(x,\tau) \tag{23}$$

yang menghasilkan persamaan difusi sederhana

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{untuk } -\infty < x < \infty,\ \tau > 0 \tag{24}$$

Bukti :

Berdasarkan persamaan $v(x,\tau) = \max(e^x - 1{,}0)$, dapat disimpulkan bahwa nilai yang mungkin dari $v(x,\tau)$ adalah $e^x - 1$ dan 0. Maka untuk membuktikan persamaan (23) menghasilkan persamaan difusi, akan digunakan kedua nilai dari $v(x,\tau)$ tersebut.

1) Untuk $v(x,\tau) = e^x - 1$, maka dari persamaan (21) diperoleh $\frac{\partial v}{\partial \tau} = k$.

   Persamaan (23) dapat dituliskan sebagai

   $$u(x,\tau) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}v(x,\tau).$$

   Berdasarkan persamaan di atas dapat ditunjukkan bahwa

   $$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial v}{\partial \tau}e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} + v\frac{1}{4}(k+1)^2 e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \tag{25}$$

   $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} + v\frac{1}{2}(k-1)e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}$$

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} + \frac{\partial v}{\partial x}(k-1)e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} + v\frac{1}{4}(k-1)^2 e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \tag{26}$$

   Substitusi nilai dari $v(x,\tau)$ dan $\frac{\partial v}{\partial \tau}$ ke dalam persamaan (25) dan (26), sehingga diperoleh

   $$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{4}(k+1)^2 e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} - \frac{1}{4}(k-1)^2 e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}$$

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4}(k+1)^2 e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} - \frac{1}{4}(k-1)^2 e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}$$

   dan terlihat bahwa $\frac{du}{d\tau} = \frac{d^2u}{dx^2}$, berarti persamaan (23) terbukti menghasilkan persamaan difusi.

2) Untuk $v = 0$, maka dari persamaan (21) diperoleh $\frac{\partial v}{\partial \tau} = 0$.

   Substitusi nilai dari $v(x,\tau)$ dan $\frac{\partial v}{\partial \tau}$ ke dalam persamaan (25) dan (26) sehingga menghasilkan

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

terlihat bahwa $\frac{du}{d\tau} = \frac{d^2 u}{dx^2}$, berarti persamaan (23) terbukti menghasilkan persamaan difusi.

Karena sekarang $v(x,\tau)$ dalam variabel u, syarat awal yang dimiliki juga harus berubah. Persamaan (23) disubstitusi ke dalam persamaan (22) sehingga diperoleh

$$u(x,0) = u_0(x) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right). \tag{27}$$

Solusi dari persamaan difusi sederhana pada persamaan (24) dapat ditempuh dengan 3 langkah yang diuraikan berikut.

Langkah 1 : Trasformasi persamaan.

Dalam persamaan (24), diperlihatkan bahwa $-\infty < x < \infty$. Maka dari itu, perlu dilakukan transformasi Fourier pada persamaan difusi sederhana di atas beserta syarat awalnya.

$$\mathcal{F}[u_\tau] = \mathcal{F}[u_{xx}] \tag{28}$$

$$\mathcal{F}[u(x,0)] = \mathcal{F}[u_0(x)]. \tag{29}$$

Misalkan $U(s,\tau) = \mathcal{F}[u(x,\tau)]$ maka berdasarkan persamaan (28) dan (29) diperoleh

$$\frac{\partial U(s,\tau)}{\partial \tau} = \mathcal{F}[u_{xx}] \tag{30}$$

$$U(0) = \Phi(s)$$

dimana Φ adalah transformasi Fourier dari $u_0(x)$.

Langkah 2 : Menyelesaikan transformasi persamaan.

Berdasarkan sifat ketiga transformasi Fourier berikut. Jika fungsi yang ditransformasi adalah suatu turunan parsial dari fungsi $u(x,\tau)$ terhadap x, maka aturan transformasinya yaitu

$$\mathcal{F}[u_{xx}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t) e^{-i\xi x} dx = -\xi^2 \mathcal{F}[u],$$

Persamaan (30) dapat dituliskan

$$\frac{d(U(s,\tau))}{d\tau} = -s^2 U(s,\tau)$$

$$\int \frac{1}{U(s,\tau)} d(U(s,\tau)) = -\int s^2 d\tau$$

$$\ln U(s,\tau) = -s^2\tau + c$$

$$U(s,\tau) = e^{-s^2\tau + c}$$

Untuk $\tau = 0$, maka $U(s,0) = e^c = \Phi(s)$

Sehingga $U(s,\tau) = \Phi(s) e^{-s^2\tau}$.

Langkah 3 : Menemukan invers dari transformasi.

Untuk menemukan solusi dari $u(x,\tau)$, kita perlu menghitung invers dari transformasi

$$\begin{aligned} u(x,\tau) &= \mathcal{F}^{-1}[U(s,\tau] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\Phi(s)e^{-s^2\tau}]. \end{aligned} \tag{31}$$

Berdasarkan sifat konvolusi $\mathcal{F}[f \cdot g] = \mathcal{F}[f]\ \mathcal{F}[g]$, persamaan (31) menjadi

$$u(x,\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(s)] \cdot \mathcal{F}^{-1}[e^{-s^2\tau}] \tag{32}$$

dengan menggunakan tabel pada [2], persamaan (32) dapat dituliskan

$$u(x,\tau) = u_0(x) \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\left(\frac{x^2}{4\tau}\right)} \right]$$

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{\frac{-(x-s)^2}{4\tau}} ds \tag{33}$$

dimana $u_0(x)$ diberikan oleh persamaan (27). Agar penyelesaian dari integral ini tepat, dibuat suatu perubahan variabel

$$y = \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}$$

sehingga dari persamaan (33) dihasilkan

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y\sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{y^2}{2}} \sqrt{2\tau}\, dy$$

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y\sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Substitusi syarat awal ke dalam persamaan di atas sehingga menghasilkan

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(y\sqrt{2\tau}+x)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(y\sqrt{2\tau}+x)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \tag{34}$$

Untuk menyelesaikan ini, kita akan menyelesaikan setiap integral secara terpisah. Integral pada suku pertama di ruas kanan persamaan (34) melengkapkan kuadrat pada eksponen yaitu

$$= -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(k+1)(x + y\sqrt{2\pi})$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)x - \frac{1}{2}\left(y^2 - [k+1]y\sqrt{2\tau} + \left(\frac{[k+1]\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2 - \left(\frac{[k+1]\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2 \right).$$

Dengan memisahkan suku-suku yang tidak memuat variabel y, diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$= \frac{1}{2}(k+1)x - \frac{1}{2}\left(y - \frac{[k+1]\sqrt{2\tau}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{[k+1]\sqrt{2\tau}}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)x - \frac{1}{2}\left(y - \frac{[k+1]\sqrt{2\tau}}{2} \right)^2 + \frac{[k+1]^2\tau}{4}$$

sehingga integral pada suku pertama di ruas kanan persamaan (35) tereduksi menjadi

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{\frac{1}{2}(y-\frac{1}{2}[k+1]\sqrt{2\tau})^2} dy \,.$$

Sekarang substitusi

$$z = y - \frac{1}{2}[k+1]\sqrt{2\tau}$$

sehingga menghasilkan

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1)$$

dimana

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

dan

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

adalah fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi normal.

Perhitungan dari integral kedua I_2 identik dengan I_1 kecuali $(k-1)$ diganti dengan $(k+1)$

$$I_2 = \frac{e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2)$$

dimana

$$d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau} \quad \text{dan} \quad N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \,.$$

Jadi

$$u(x,\tau) = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \; N(d_1) + e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \; N(d_2) .$$

Setelah mendapatkan hasil integral dari $u(x,\tau)$, maka kembali ke persamaan

$$v = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x,\tau)$$

dan mensubstitusi invers transformasi di bawah ke dalam persamaan (14). Penting sebagai catatan bahwa simbol V dalam persamaan (14) diganti dengan C untuk lebih menekankan bahwa harga derivatif yang ingin ditentukan adalah harga dari opsi ***European Call*** ,

$$x = \ln\left(\frac{S}{E}\right)$$

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$$

$$C = Ev(x,\tau)$$

$$C(S,t) = SN(d_1) + Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

dimana

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Dengan mendapatkan solusi dari $C(S,t)$, berarti bahwa harga opsi bentuk *European Call* dengan menggunakan persamaan diferensial Black-Scholes telah ditentukan.

4. Kesimpulan

Titik penting dalam penurunan persamaan diferensial Black-Scholes adalah bahwa penetapan satu tipe khusus dari sekuriti suatu derivatif untuk menentukan harga hingga memenuhi syarat batas dari *European call* tidak pernah dilakukan. Ini berarti bahwa seseorang dapat menggunakan persamaan diferensial Black-Scholes untuk menentukan harga dari sebarang jenis opsi dengan hanya mengubah syarat batas saja.

Daftar Pustaka

[1] Andriansyah, 2004, "*The Analytical Solutions Of European Options On Shares Pricing Models"*

[2] N. Coelen, 2002, "*Black-Scholes Option Pricing Model"*.

[3] S. J. Farlow 1982, "*Partial Differential Equations For Scientists and Engineers*", Amerika Serikat.

[4] S. E. Shreve, 1996, " *Stochastic Calculus and Finance*".

[5] http://www.jsx.co.id/MainMenu/Education/WhatisBond/tabid/89/lang/id-ID/Default.aspx. 2007. [24 November 2007]

[6] http://spicaalmilia.files.wordpress.com/2007/07/perjalanan-sejarah-option.pdf [15 Juni 2007]

[7] http://id.wikipedia.org/wiki/Sekuriti, pp: 22:46. [30 Desember 2007]

[8] http://id.wikipedia.org/wiki/Opsi_(keuangan), pp : 06:46. [15 November 2007].

[9] http://www.sinarharapan.co.id/ekonomi/eureka/2004/0514/eur1.html, 2003. [21 November 2007]