JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI e-ISSN: 2614-8811
Published by Departement of Mathematics, Hasanuddin University, Indonesia
https://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk/index
Vol. 19, No. 2, January 2023, pp. 317-322
DOI: 10.20956/j.v19i2.22957

Metric Dimension of Shackle Operation C_3 Cycle Graph

Dimensi Metrik dari Hasil Operasi Shackle Graf Siklus C_3

St. Munieroh Fachrunnisa D[1*], Hasmawati[2*], Amir Kamal Amir[3*]

**Program Studi Matematika, FMIPA-Universitas Hasanuddin*
E-mail: *dsmf18h@student.unhas.ac.id[1]*, *hasmaba97@gmail.com[2]*, *amirkamalamir@yahoo.com[3]*

Received: 18 September 2022; Accepted: 9 November 2022; Published: 5 January 2023

Abstract

Let G be a connected graph and W be a ordered vertices subset on a connected graph G. The set W is called resolving set for G if every vertex on graph G has distinct representation of W. A resolving set containing a minimum number of vertices is called resolving set minimum or basis for G and the cardinality of resolving set is the metric dimension on graph G, denoted by $dim(G)$. In the thesis discusses about metric dimensions of shackle operation C_3 cycle graph, $dim(Shack(C_3^1, C_3^2, \ldots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \ldots, v_3^{k-1} = v_1^k)) = 2$ for $k \geq 2$. To proof this results, we was used mathematical induction method.

Keywords : Metric Dimension, Shackle Operation, Cycle Graph.

Abstrak

Misalkan G adalah graf terhubung dan W adalah sub himpunan titik terurut pada graf terhubung G. Himpunan W disebut himpunan pembeda pada G jika untuk setiap titik pada graf G memiliki representasi jarak yang berbeda tehadap W. Himpunan pembeda dengan banyak anggota minimum disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari G dan kardinalitas himpunan tersebut adalah dimensi metrik pada graf G, dinotasikan dengan $dim(G)$. Dalam makalah ini dibahas mengenai dimensi metrik hasil operasi shackle graf siklus C_3, $dim(Shack(C_3^1, C_3^2, \ldots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \ldots, v_3^{k-1} = v_1^k)) = 2$ untuk $k \geq 2$. Metode yang digunakan dalam membuktikan hasil tersebut adalah induksi matematika.

Kata Kunci : Dimensi Metrik, Operasi Shackle, Graf Siklus.

1. PENDAHULUAN

Graf adalah pasangan himpunan terurut (V, E), dan ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, dengan V adalah himpunan tidak kosong yang anggotanya disebut titik dan E adalah himpunan pasangan-pasangan tidak terurut dari anggota V yang disebut sisi. Dimensi metrik pada suatu graf yang diperkenalkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1976 adalah salah satu topik penelitian yang banyak diminati para penelitian teori graf.

Terdapat beberapa hasil tentang dimensi metrik suatu graf yang telah diperoleh diantaranya dalam [1] dituliskan bahwa $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf lintasan P_n. Sedangkan makalah [2], menyajikan dimensi metrik graf siklus. Dimensi metrik graf shackle C_4 disajikan dalam makalah [9], sedangkan makalah [7], membahas dimensi metrik graf shackle H_2^2, dan makalah [10], membahas dimensi metrik graf shackle W_m dan graf shackle S_m. Beberapa metode yang disajikan pada makalah [1] dan [2] akan dikembangkan untuk digunakan dalam penentuan dimensi metrik graf shackle siklus C_3. Hasil yang diperoleh dalam penelitian ini, ditulis dalam bentuk proposisi dan teorema, dan di akhir buktinya diberi tanda ■.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Graf G adalah pasangan himpunan $\big(V(G), E(G)\big)$, dengan $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong, yang anggotanya disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi. Misalkan sisi $e = uv \in E(G)$, maka dikatakan bahwa sisi e terkait dengan titik u dan titik v, sedangkan titik u dan titik v disebut titik-titik yang bertetangga. Banyaknya anggota dari $V(G)$ disebut orde (*order*) dari graf G dan banyaknya anggota dari $E(G)$ disebut ukuran (*size*). Sedangkan, banyaknya anggota pada suatu himpunan disebut kardinalitas [4]. Dalam [4] disebutkan bahwa lintasan pada graf G adalah barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3 \dots v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2,\dots,n-1$. Graf yang terdiri dari satu lintasan disebut graf lintasan dan dinotasikan P_n apabila berorde n. Misalkan $P_n: v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ adalah lintasan berorde n dengan panjang $n-1$. Siklus C_n dengan panjang n, $n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$. Panjang suatu lintasan adalah banyaknya sisi yang ada pada lintasan tersebut. Lintasan dari u ke v dinotasikan $u - v$.

Himpunan tetangga suatu titik v pada graf G dinotasikan $N_G(v) = \{u | uv \in E(G)\}$. Graf G terhubung jika setiap dua dari titiknya terhubung [5].

Misalkan G adalah graf sederhana dan $u, v \in V(G)$. Jarak titik u dan v ditulis $d(u,v)$, yang memenuhi [4],

$$d(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{jika } u = v, \\ k, & \text{jika panjang lintasan terpendek } u - v \text{ adalah } k, \\ \infty, & \text{jika tidak ada lintasan dari } u \text{ ke } v. \end{cases}$$

Misalkan $\{G_i \big| i \in \{1,2,3,\dots,k\}\}$ untuk $k \in \mathbb{N}$ dan $k \geq 2$, merupakan kumpulan graf berhingga dengan titik tetap masing-masing adalah u_i dan v_i untuk $i = 1,2,\dots,k$, dinotasikan $Shack(G_1, G_2, \dots, G_k: v_j = u_{j+1}; j = 1,2,\dots,k)$ adalah graf dengan himpunan titik $V\left(Shack(G_1, G_2, \dots, G_k: v_j = u_{j+1}; j = 1,2,\dots,k)\right) = V(G_1) \cup V(G_2 \backslash v_2^1) \cup V(G_3 \backslash v_3^1) \cup \dots \cup V(G_k \backslash v_k)$ dan himpunan sisi $E\left(Shack(G_1, G_2, \dots, G_k: v_j = u_{j+1}; j = 1,2,\dots,k)\right) = \bigcup_{i=1}^{k} E(G_i)$ [4]. Graf yang akan diteliti dalam penelitian ini adalah $Shack(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k)$ dengan $k \geq 2$. Himpunan titik $V\left(Shack(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k)\right) = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1\} \cup \{v_2^i, v_3^i; 2 \leq i \leq k\}$ dan himpunan sisi $E\left(Shack(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k)\right) = \{v_1^i v_2^i, v_1^i v_3^i, v_2^i v_3^i; 1 \leq i \leq k\}$ dengan $v_3^i = v_1^{i+1}, \forall i$.

Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dengan $V(G)$ adalah himpunan titik-titiknya dan himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ merupakan himpunan bagian dari $V(G)$. Representasi titik $v \in V(G)$ terhadap W di G adalah $r(v|W) = \big(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)\big)$. Himpunan W disebut himpunan pembeda pada G jika untuk setiap $u, v \in V(G), u \neq v$ mengakibatkan $r(u|W) \neq r(v|S)$ [2]. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari graf G[8]. Banyaknya anggota atau kardinalitas dari basisnya (himpunan pembeda minimum) disebut dimensi metrik, dinotasikan dengan $dim(G)$ [11].

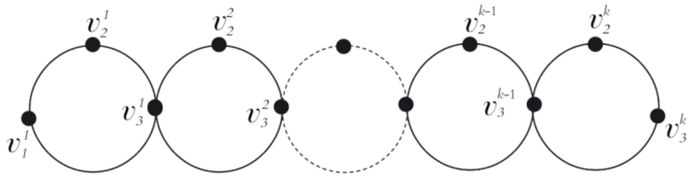
Dalam penentuan dimensi metrik untuk graf $Shack\big(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\big)$ diperlukan beberapa sifat seperti yang disajikan pada teorema berikut.

Teorema 2.1. Jika G suatu graf terhubung dengan orde n, maka $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$ [1].

Teorema 2.2. Jika G graf siklus dengan n titik dan $n \geq 3$, maka $dim(C_n) = 2$ [2].

Teorema 2.3. Jika G adalah graf terhubung sederhana dengan dimensi metrik 2 dan misalkan $\{v_1, v_2\} \subseteq V(G)$ merupakan basis metrik di G, maka derajat v_1 dan v_2 paling banyak adalah 3 dan terdapat lintasan terpendek antara v_1 dan v_2 [6].

Misalkan G_i adalah graf dengan $V(G_i) = \{v_1^i, v_2^i, v_3^i\}$ dan $E(G_i) = \{v_1^i v_2^i, v_2^i v_3^i, v_3^i v_1^i\}$, maka graf $Shack\big(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\big)$ dapat dilihat pad Gambar 1.



Gambar 1. Graf $Shack\big(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\big)$.

3. HASIL UTAMA

Hasil utama dalam makalah ini adalah perumuman dimensi metrik yang disajikan pada Teorema 3.1. Diberikan pernyataan yang dapat membantu dalam membuktikan Teorema 3.1 disajikan dalam bentuk Proposisi 3.1.

Proposisi 3.1 Dimensi metrik graf $Shack(C_3^1, C_3^2 : v_3^1 = v_1^2)$ adalah 2.
Bukti:
Misalkan graf $Shack(C_3^1, C_3^2 : v_3^1 = v_1^2)$ memiliki himpunan titik $V\Big(Shack(C_3^1, C_3^2 : v_3^1 = v_1^2)\Big) = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_2^2, v_3^2\}$ dan himpunan sisi $E\Big(Shack(C_3^1, C_3^2 : v_3^1 = v_1^2)\Big) = \{v_1^1 v_2^1, v_1^1 v_3^1, v_2^1 v_3^1, v_3^1 v_2^2, v_3^1 v_3^2, v_2^2 v_3^2\}$. Pilih himpunan $W = \{v_1^1, v_3^2\}$, representasi setiap titik pada graf $Shack(C_3^1, C_3^2 : v_3^1 = v_1^2)$ terhadap W adalah

$$r(v_1^1|W) = \Big(d(v_1^1, v_1^1), d(v_1^1, v_3^2)\Big) = (0,2),$$
$$r(v_2^1|W) = \Big(d(v_2^1, v_1^1), d(v_2^1, v_3^2)\Big) = (1,2),$$
$$r(v_3^1|W) = \Big(d(v_3^1, v_1^1), d(v_3^1, v_3^2)\Big) = (1,1),$$

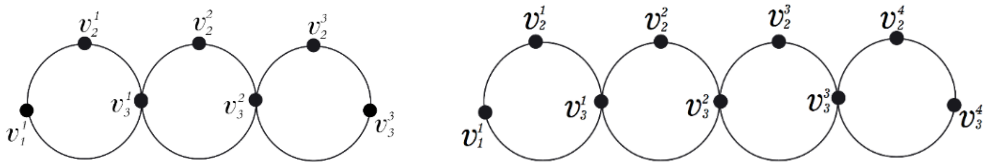
$$r(v_2^2|W) = \left(d(v_2^2, v_1^1), d(v_2^2, v_3^2)\right) = (2,1),$$
$$r(v_3^2|W) = \left(d(v_3^2, v_1^1), d(v_3^2, v_3^2)\right) = (2,0).$$

Hasil observasi menunjukkan semua titik $Shack(C_3^1, C_3^2: v_3^1 = v_1^2)$ mempunyai representasi yang berbeda, sehingga W merupakan himpunan pembeda dari $Shack(C_3^1, C_3^2: v_3^1 = v_1^2)$ dengan kardinalitas $|W| = 2$. Jadi, $dim(Shack(C_3^1, C_3^2: v_3^1 = v_1^2)) \leq 2$. ... (3.1)

Untuk batas bawah dari dimensi metrik $Shack(C_3^1, C_3^2: v_3^1 = v_1^2)$ dapat merujuk pada Teorema 2.1 menyatakan bahwa $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$. Graf $Shack(C_3^1, C_3^2: v_3^1 = v_1^2) \neq P_n$, maka dapat dipastikan batas bawah $dim(Shack(C_3^1, C_3^2: v_3^1 = v_1^2)) \geq 2$. ... (3.2)

Berdasarkan Persamaan (3.1), dan (3.2) diperoleh batas bawah dan batas atas yaitu $2 \leq dim(Shack(C_3^1, C_3^2: v_3^1 = v_1^2)) \leq 2$. Jadi dimensi metrik graf $Shack(C_3^1, C_3^2: v_3^1 = v_1^2)$ $dim(Shack(C_3^1, C_3^2: v_3^1 = v_1^2)) = 2$. ■

Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan bahwa $dim\left(Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)\right)$ dan $dim(Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3, C_3^4: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, v_3^3 = v_1^4))$ adalah 2. Graf $Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)$ dan $Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3, C_3^4: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, v_3^3 = v_1^4)$ dapat dilihat pada Gambar 2.



(a) (b)

Gambar 2. (a) $Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)$ dan (b) $Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3, C_3^4: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, v_3^3 = v_1^4)$

Berdasarkan hasil pada Proposisi 3.1, dirumuskan perumuman dimensi metrik graf $Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)$ untuk $k \geq 2$ dalam bentuk teorema sebagai berikut.

Teorema 3.1 Untuk $k \geq 2$, dimensi metrik dari graf $Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)$ adalah 2.

Bukti:

Pembuktian Teorema 3.1 menggunakan metode induksi matematika, yaitu:

i. Berdasarkan hasil dari Proposisi 3.1, diperoleh :
   a. Untuk $k = 2$, $dim(Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)) = 2$,
   b. Untuk $k = 3$, $dim(Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)) = 2$,
   c. Untuk $k = 4$, $dim(Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)) = 2$.

ii. Asumsikan $dim\left(Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^{k-1}: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-2} = v_1^{k-1}\right)\right)$ adalah 2 untuk $k \geq 2$, dengan himpunan pembeda minimum adalah $W = \{v_1^1, v_3^{k-1}\}$. Representasi setiap titik di $Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^{k-1}: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-2} = v_1^{k-1}\right)$ terhadap W adalah sebagai berikut.

$r(v_1^1|W) = d(v_1^1, v_1^1), d\left(v_1^1, v_3^{k-1}\right) = (0, k-1)$;
$r\left(v_2^i|W\right) = d\left(v_2^i, v_1^1\right), d\left(v_2^i, v_3^{k-1}\right) = (i, (k-1) - i + 1)$, untuk $1 \leq i \leq k-1$;
$r\left(v_3^i|W\right) = d\left(v_3^i, v_1^1\right), d\left(v_3^i, v_3^{k-1}\right) = (i, (k-1) - i)$, untuk $1 \leq i \leq k-1$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $dim\left(Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)\right)$ juga adalah 2.

Graf $Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)$ adalah graf yang dikonstruksi dari $V(Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^{k-1} : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-2} = v_1^{k-1}\right)) \cup V(C_3^k)$ dengan titik $v_3^{k-1} = v_1^k$.

Pilih himpunan $W_1 = \{v_1^1, v_3^k\}$. Jarak setiap titik terhadap W_1 sama dengan jarak setiap titik terhadap W pada unsur pertama. Dan untuk unsur kedua jarak setiap titik terhadap W_1 bertambah 1, karena berdasarkan asumsi diketahui jarak setiap titik terhadap v_3^{k-1}, sehingga jarak setiap titik terhadap v_3^k adalah jarak ke setiap titik terhadap v_3^{k-1+1}.

Akibatnya, representasi setiap titik pada graf $Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)$ terhadap W_1 adalah sebagai berikut.

$r(v_1^1|W_1) = d(v_1^1, v_1^1), d\left(v_1^1, v_3^k\right) = (0, k)$,
$r\left(v_2^i|W_1\right) = d\left(v_2^i, v_1^1\right), d\left(v_2^i, v_3^k\right) = (i, k - i + 1)$, untuk $1 \leq i \leq k$;
$r\left(v_3^i|W_1\right) = d\left(v_3^i, v_1^1\right), d\left(v_3^i, v_3^k\right) = (i, k - i)$, untuk $1 \leq i \leq k$.

Terlihat bahwa representasi setiap titik pada graf $Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)$ terhadap $W_1 = \{v_1^1, v_3^k\}$ berbeda dan $|W_1| = 2$. Dengan demikian W_1 merupakan himpunan pembeda minimum dari graf $Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)$, maka $dim\left(Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)\right) \leq 2$. ... (3.3)

Berdasarkan Teorema 2.1 menyatakan bahwa $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$. Graf $Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right) \neq P_n$, maka dapat dipastikan batas bawah dari dimensi metrik graf $Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)$ adalah $dim\left(Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)\right) \geq 2$.
... (3.4)

Berdasarkan Persamaan (3.3) dan (3.4) diperoleh batas bawah dan batas atas yaitu $2 \leq dim\left(Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)\right) \leq 2$. Jadi dimensi metrik graf $Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)$ adalah $dim\left(Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)\right) = 2$. ■

4. KESIMPULAN

Dari hasil yang diperoleh, didapatkan kesimpulan bahwa dimensi metrik pada graf $Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)$ dengan $k \geq 2$, adalah $dim(Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)) = 2$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M. A., & Oellermann, O. R., 2000. Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 105, 99–113.

[2] Eka R, S. & Rahadjeng, B., 2014. Dimensi Metrik pada Graf Lintasan, Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang, dan Graf Bipartit Komplit. *Jurnal : Universitas Negeri Surabaya*, Vol. 1, No. 1, 1-6.

[3] Harary, F. & Melter, R., 1976. On the Metric Dimension of a Graph. *Ars Combin.* Vol. 2 : 191-195.

[4] Hasmawati, 2020. *Pengantar dan Jenis-Jenis Graf*. UPT Unhas Press, Makassar.

[5] Hasmawati, Hiding, N., Nurwahyu, B., Syukur Daming, A., & Kamal Amir, A., 2022. The partition dimension of the vertex amalgamation of some cycles. *Heliyon*, Vol. 8, 1-7.

[6] Liu, J., Faisal Nadeem, M., Muhammad Afzal Siddiqui, H., & Nazir, W., 2019. Computing Metric Dimension of Certain Families of Toeplitz Graphs. *IEEE Access*, Vol. 7, 126734-126741.

[7] Marsidi., Hesti Agustin, I., Dafik., Alfarisi, R., & Siswono, H., 2018. On the Metric Dimension of Some Operation Graphs. *Cauchy-Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, Vol. 5, No. 3, 88-94.

[8] Rezaei, A., Khashyarmanesha, K., & Afkhamib, M., 2022. On the metric dimension of Cayley graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, Vol. 19, No. 2, 118-124.

[9] Saifuddin, I., 2015. *Dimensi Partisi dari Graf Khusus dan Operasinya*. Skripsi. FMIPA Universitas Jember, Jember.

[10] Saifuddin, I., Umilasari, R., & Jalil, A., 2021. Metric dimension of vertex shackle operation result graph on wheel and star graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 2279, No. 1, 1-5.

[11] Wahyudi, S., Sumarno, & Suharmadi, 2011. Dimensi Metrik Pengembangan Graf Kincir Pola K_1+mK_3. *Journal mathematics and its applied*, Vol. 8, No. 2, 17-22.